

PL ISSN 0071-674X

POLSKA AKADEMIA NAUK — ODDZIAŁ W KRAKOWIE

KOMISJA NAUK EKONOMICZNYCH I STATYSTYKI

KRAKOWSKA AKADEMIA

IM. ANDRZEJA FRYCZA MODRZEWSKIEGO

folia oeconomica cracoviensia

Vol. LI

2010

WYDAWNICTWO ODDZIAŁU POLSKIEJ AKADEMII NAUK
KRAKÓW

POLSKA AKADEMIA NAUK — ODDZIAŁ W KRAKOWIE
KOMISJA NAUK EKONOMICZNYCH I STATYSTYKI
KRAKOWSKA AKADEMIA
IM. ANDRZEJA FRYCZA MODRZEWSKIEGO

FOLIA OECONOMICA CRACOVIENSIA

Vol. LI
2010

WYDAWNICTWO ODDZIAŁU POLSKIEJ AKADEMII NAUK
KRAKÓW

REDAKTOR

prof. dr hab. Andrzej Iwasiewicz

KOMITET REDAKCYJNY

prof. dr hab. Anna Czubala

prof. dr hab. Henryk Gurgul

prof. dr hab. Jacek Osiewalski — Sekretarz Naukowy Komisji Nauk Ekonomicznych
i Statystyki Oddziału PAN w Krakowie i sekretarz naukowy Komitetu Redakcyjnego

Adres redakcji

31-018 Kraków, ul. św. Jana 28

Wydanie publikacji finansowane przez
Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego,
Krakowską Akademię im. A. Frycza Modrzewskiego

Redaktor Wydawnictwa

Krystyna Duszyk

© *Copyright by Autorzy, Polska Akademia Nauk Oddział w Krakowie*
Kraków 2011

ISSN 0071-674X

Polska Akademia Nauk — Oddział w Krakowie

31-018 Kraków, ul. św. Jana 28

~~tel.: (12) 422-64-34; fax: (12) 422-27-91~~

Druk i oprawa: FALL, ul. Garczyńskiego 2, 31-524 Kraków

SPIS TREŚCI

Henryk Gurgul, Paweł Zając: <i>Model dynamiki procesu powstawania i upadłości przedsiębiorstw</i>	5
Daniel Kosiorowski: <i>Wybrane zastosowania głębi Studenta w odpornej analizie statystycznej</i>	27
Anna Osiewalska: <i>Czasopisma z zakresu nauk ekonomicznych: analiza wzajemnych powiązań i wpływu w latach 2003–2007</i>	57
Bartosz Spalek: <i>Estymacja ryzyka rynkowego w oparciu o modele GARCH i teorię wartości ekstremalnych</i>	75

MODEL DYNAMIKI PROCESU POWSTAWANIA I UPADŁOŚCI PRZEDSIĘBIORSTW

HENRYK GURGUL

Samodzielna Pracownia Zastosowań Matematyki w Ekonomii
Akademia Górniczo-Hutnicza
PL 30-059 Kraków, ul. Gramatyka 10
e-mail: henryk.gurgul@gmail.com

PAWEŁ ZAJĄC

Samodzielna Pracownia Zastosowań Matematyki w Ekonomii
Akademia Górniczo-Hutnicza
PL 30-059 Kraków, ul. Gramatyka 10
e-mail: pzajac@zarz.agh.edu.pl

Praca była przedstawiona przez autorów na posiedzeniu Komisji Nauk Ekonomicznych i Statystyki Oddziału PAN w Krakowie, 15 lipca 2010 roku.

ABSTRACT

H. Gurgul, P. Zajac. *Dynamic model of birth and death of enterprises*. Folia Oeconomica Cracoviensia 2010, 51: 5–25.

The aim of this article is to define model describing dynamics of bankruptcy and foundation of new enterprises. In the first part we try to answer what is bankruptcy in law, economic and social sense. It results from overview of the literature that bankruptcy is as natural as growth, and both of these contradictions are complementary. An important inference is also a need for improving bankruptcy mechanism, because the more efficient it is, the healthier market surrounds us. On the basis of bankruptcy there emerge new firms. We derived procedure in order to forecast the number of new firms. The conclusion is that dynamic mathematical models may be useful tool of prediction of number of new firms founded.

KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

bankruptcy of enterprises, foundation of enterprises, dynamics of foundation
and bankruptcy, forecasts

upadłość przedsiębiorstwa, tworzenie przedsiębiorstw, dynamika tworzenia i upadłości
przedsiębiorstw, prognozy

1. WPROWADZENIE

W ostatnich latach najbardziej istotną cechą działalności przedsiębiorstw i całej gospodarki jest wzrost ryzyka oraz niepewność. Poszczególne przedsiębiorstwa, ich grupy, czy cała gospodarka narodowa danego kraju napotyka w różnych okresach na nieprzewidziane, negatywne skutki rozmaitych zdarzeń i procesów, mających miejsce niekiedy w odległych geograficznie częściach świata.

Najnowszym przykładem jest niedawny kryzys finansowy i towarzyszący mu kryzys gospodarczy, który dotknął w roku 2007 Stany Zjednoczone, a następnie w roku 2008 praktycznie wszystkie kraje. Jest to dowód na siłę powiązań pomiędzy przedsiębiorstwami i całymi gospodarkami w erze globalizacji. Powiększająca się niepewność w gospodarce wynika między innymi ze zmniejszania się cywilizacji przemysłowej i rozwijania się tzw. gospodarki opartej na wiedzy. Te radykalne, przełomowe zmiany prowadzą do zastępowania dotychczas obowiązujących modeli gospodarki przez nowe modele dotyczące m.in. inwestowania, produkowania, wymiany handlowej, kształcenia, zarządzania, handlu, pracy, zatrudnienia, konsumpcji. Dochodzi także do znaczących zmian społecznych i obyczajowych, w tym np. modelu rodziny. Poszczególne zawody, stanowiska pracy a także przedsiębiorstwa czy całe gałęzie gospodarki stają się coraz bardziej nietrwałe (wymierają), co wynika głównie z postępu technologicznego, którego intensywność nie ma precedensu w historii, niosącego ze sobą zarówno pozytywne, jak i uboczne, negatywne, a nawet destrukcyjne zmiany. Coraz szybciej „stare” jest zastępowane lub eliminowane przez „nowe”. Dotyczy to również teorii ekonomicznych i to nawet tych za stworzenie których autorzy otrzymali jeszcze nie tak dawno nagrodę Nobla. Szybkim zmianom towarzyszy istotny wzrost niepewności. Skutki wzrostu niepewności dają się mocno we znaki także przedsiębiorstwom działającym na terenie Polski (a może nawet przede wszystkim). Niepewność dotycząca polskie przedsiębiorstwa jest bowiem dodatkowo potęgowana poprzez proces transformacji i konieczność przystosowania się do wymogów Unii Europejskiej. Niepewność jest istotną przeszkodą w formułowaniu długookresowych strategii rozwoju przedsiębiorstw, co może być źródłem błędów w zarządzaniu firmą, a w konsekwencji prowadzić do upadłości.

Problemy niepewności i ryzyka, mimo licznych prac na ten temat, są stosunkowo słabo rozpoznane w literaturze ekonomicznej, a jeszcze gorzej problemy bankructwa i upadłości. W języku potocznym uważa się ostatnio wymienione pojęcia za synonimy. W rzeczywistości jednak upadłość (upadłość układowa) jest terminem prawnym, zaś bankructwo (upadłość likwidacyjna) terminem dotyczącym sfery ekonomicznej. Bankrutem jest podmiot, który nie jest w stanie samodzielnie kontynuować działalności bez uzyskania pomocy finansowej z zewnątrz. Najczęściej źródłem tej sytuacji jest utrata zaufania kontrahentów, klientów, znaczne pogorszenie wskaźników finansowych, niemoż-

ność realizacji zobowiązań, bądź nawet finansowania bieżącej działalności. Może to doprowadzić do całkowitego „unieruchomienia” firmy i w efekcie do likwidacji. Szczegółowe przyczyny bankructw przedsiębiorstw w Polsce wymienia Zdyb (2008).

Z kolei upadłość może mieć miejsce, pomimo braku przesłanek ekonomicznych do likwidacji przedsiębiorstwa — wynika ona z przepisów ustawowych i wyroku sądu.

Upadanie firm bez względu na wielkość, rodzaj, przedmiot prowadzonej działalności, branżę, terytorium czy kontrahentów jest źródłem pewnego zameętu, a przede wszystkim zaniepokojenia na rynku — przeważnie pozostają niespłacone długi, niewykonane zobowiązania, niezapłacone podatki, niezrealizowane usługi dla dotychczasowych kontrahentów i kooperantów. Najbardziej bolesnym społecznie skutkiem jest zwalnianie załogi, co zwiększa szeregi bezrobotnych. W wyniku upadłości pozostają niewykorzystane zasoby, narasta frustracja i niezadowolenie nie tylko zwolnionych pracowników, ale także (a często przede wszystkim) właścicieli przedsiębiorstw, inwestorów i akcjonariuszy, którzy zaangażowali swoje oszczędności, zasoby i pomysły w celu wytwarzania w przedsiębiorstwie dóbr czy świadczenia usług. W literaturze przedmiotu upadłość określa się jako pewną bolesną dla podmiotów i otoczenia formę destrukcji, o zdecydowanie negatywnych skutkach w krótkim okresie.

Jednakże w dłuższej perspektywie mogą dominować elementy pozytywne, wynikające z upadku nieefektywnego przedsiębiorstwa, które ani właścicielowi ani zatrudnionym pracownikom nie przynosiło godziwych dochodów. W szczególności wisząca nad firmami groźba upadłości działa mobilizująco na przedsiębiorców, zachęcając ich do bardziej efektywnych działań i zniechęcając do nadmiernego zadłużania się.

„Niewidzialna ręka rynku” sama przez się najczęściej nie może wyeliminować przedsiębiorców nieefektywnych. Dlatego konieczna jest ochrona otoczenia przed skutkami ich działalności, ujęta w przepisach prawa upadłościowego i naprawczego. Przepisy te pozwalają na minimalizację ujemnych skutków dla otoczenia, wynikających z niewypłacalności dłużnika.

Konieczność istnienia takich przepisów wynika stąd, że rozpoczynanie działalności gospodarczej nie jest w praktyce objęte restrykcjami. W szczególności nie ma możliwości sprawdzenia kwalifikacji i przydatności kandydatów na przedsiębiorców. Dlatego niektórzy z nich muszą upaść z powodu np. niekompetencji, błędów w zarządzaniu, przyczyn zewnętrznych i innych okoliczności, często niezależnych od nich.

2. PRZEGLĄD LITERATURY PRZEDMIOTU

Zdaniem Josepha Schumpetera (1934) upadek przedsiębiorstwa jest wynikiem równoległych procesów niszczenia i kreacji. Tę opinię wyrażają też Foster i Kaplan (2003). Zgodnie z ich teorią inspiracja, sterowanie i kontrolowanie procesów twórczej destrukcji są stymulowane przez rynki kapitałowe poprzez zasilanie i wspomaganie kapitałowe przedsiębiorstw oraz wycofywanie zasilania w kapitał, gdy obniża się konkurencyjność przedsiębiorstwa. Rozwijającej się firmie oferuje się zasoby kapitału, następnie wycofuje te zasoby niemal natychmiast po obniżeniu konkurencyjności tej organizacji i wystąpieniu symptomów regresu. W przypadku upadłości ma się do czynienia nie tylko z konsekwencjami dotychczasowego działania firmy, ale także z powiązanymi ze sobą procesami destrukcji i tworzenia.

Zdaniem Greinera i Scheina (1988, por. też Koźmiński i Piotrowski 1999) sprawność organizacji w początkowej fazie jej istnienia, wynika ze zdolności i kreatywności właściciela. Dalsze ulepszenia wynikają już z problemów, na jakie organizacja napotyka w następnych etapach swojej działalności i sposobów ich przezwyciężenia, co jest warunkiem jej przeżycia.

Jeśli kierownictwo tych problemów w porę nie zauważy to wcześniej czy później dochodzi do upadku tego przedsiębiorstwa.

W warunkach niepewności, w których podejmuje się działania, w niezwykle szybko zmieniającym się otoczeniu, przy pojawiających się ciągle nowych problemach i zadaniach, cykl istnienia przedsiębiorstw w niezmienionej formie ulega znacznemu skróceniu w obecnej rzeczywistości gospodarczej. Następuje szybka eliminacja podmiotów, które trwają przy starych, niekonkurencyjnych rozwiązaniach. Brak zmian wewnątrz organizacji prowadzi z upływem czasu do jej zagłady jako całości.

Te zagadnienia są także przedmiotem rozważań Handy (1996), który stworzył pojęcie tzw. „esowatej krzywej”. Zasadniczą jego tezą jest stwierdzenie, że przedsiębiorcy jeszcze w okresie prosperity powinni przygotowywać firmę na czas kryzysu, wywołując sztucznie jego objawy i podejmując środki zaradcze. Choć organizacja na skutek tych sztucznych bodźców na krótko osłabia się, to jednak zmiany będące odpowiedzią na sztucznie wywołany kryzys na dłuższy czas wzmacniają i uodparniają tę organizację.

Według Fredericka i in. (1988) oraz Davisa i Blomstroma (por. Majchrzak 2003) przedsiębiorstwa nie funkcjonują same dla siebie, ale spełniają pewne funkcje społeczne, dzięki powierzonym im przez społeczeństwo zasobom. Jeśli organizacja tych funkcji już nie realizuje, czyli nie wykorzystuje powierzonych jej zasobów tak jak tego chce społeczeństwo, to rozpoczyna swój marsz ku upadkowi. Wiąże się z tym odebranie zasobów materialnych, finansowych i ludzkich, koniecznych do istnienia i funkcjonowania tego przedsiębiorstwa. Eliminacja przedsiębiorstwa jest więc skutkiem dążenia społeczeństwa do poprawy efektywności funkcjonowania gospodarki.

Oprócz wymienionych tu zalet upadłości, takich jak eliminacja z rynku nierentownych podmiotów oraz ochrona wierzycieli przed nieuczciwymi dłużnikami, upadłość oparta na odpowiednich zasadach i regułach pozwala wyeliminować przedsiębiorstwa funkcjonujące na skraju opłacalności. Jej zasady i reguły pozwalają również pozbyć się obciążeń z tytułu podtrzymywania przy życiu firm, które latami funkcjonują na skraju opłacalności.

Często daje się odczuć praktyczna niemożność przeciwstawienia się w sytuacji angażowania środków społecznych w przedsięwzięcia z góry skazane na niepowodzenie, np. w Polsce w przypadku dużych postsocjalistycznych firm, takich jak kopalnie czy stocznie.

W praktyce upadłość jest głównie narzędziem regulacji i ochrony rynku (por. Zedler 2003). Po fazie wzrostu firma natrafiając na zmienność otoczenia, do której nie umie się dostosować, jest poddawana presji rynku, co może prowadzić do bankructwa, a dalej postępowania upadłościowego, chroniącego wierzycieli, pracowników oraz państwo. W wyniku tego postępowania dochodzi albo do reorganizacji, albo do likwidacji upadłego przedsiębiorstwa, co prowadzi do ochrony i lepszego wykorzystania zasobów społeczeństwa jako całości.

Ciekawa interpretacja teorii rozwoju i upadłości przedsiębiorstw oparta jest na biologicznej teorii ewolucji Darwina (*Encyklopedia biologiczna* 1998). Darwin napisał, że „wszystkie istoty żywe, bez wyjątku, mają tendencję do liczebnego wzrostu w tak dużym stopniu, że żadna okolica, żadne stanowisko, nawet cała powierzchnia ziemi lub cały ocean nie pomieściłyby potomstwa jednej pary organizmów po pewnej liczbie pokoleń. Nieuniknionym wynikiem tego jest nieustannie trwająca walka o byt” (por. Malinowski 1974). Okazuje się, że analogiczną tendencję wykazują przedsiębiorstwa dążące do ekspansji, co prowadzi do walki konkurencyjnej pomiędzy nimi, analogicznie jak to jest pomiędzy istotami żywymi.

Ten proces jest realizacją tzw. doboru naturalnego. Jego wynikiem jest utrzymanie się przy życiu tylko najlepszych jednostek, umiejących najlepiej przystosować się do otoczenia. Dotyczy to także przedsiębiorstw. Niektórzy autorzy (Pieńkowska 2005) uważają upadłość za naturalny element cyklu „życia” przedsiębiorstwa. W rzeczywistości nie wszystkie przedsiębiorstwa, nawet te „zdrowe”, mogą przeżyć pełny cykl. Dochodzi bowiem do przejęć, fuzji, podziałów itd.

Od końca lat sześćdziesiątych zaczęto stosować metody ilościowe do prognozowania bankructw, a prekursorem badań w tym kierunku był Altman E. W swojej pracy (Altman 1968) wykorzystał on metody dyskryminacyjne, dzieląc badane przedsiębiorstwa na dwie grupy: zagrożone i niezagrożone bankructwem. Grupowanie następowało za pomocą funkcji określonej na zbiorach wskaźników finansowych, zdefiniowanych dla tych przedsiębiorstw. Należały do nich: kapitał obrotowy w stosunku do aktywów ogółem, zyski zatrzymane w stosunku do aktywów ogółem (zyski zatrzymane — suma zysków i strat, odnotowanych przez przedsiębiorstwo w czasie całego okresu jego działalności), wskaź-

nik EBIT2 w stosunku do aktywów ogółem, wartość rynkowa kapitału własnego podzielona przez zobowiązania ogółem oraz sprzedaż w stosunku do aktywów ogółem. Altman za pomocą swojego modelu sklasyfikował prawidłowo aż 95% przedsiębiorstw na jeden rok przed upadłością i 83% przedsiębiorstw na dwa lata przed upadłością.

Badania zapoczątkowane przez Altmana i kontynuowane przez innych badaczy doprowadziły do powstania w Stanach Zjednoczonych w roku 1982 Instytutu Bankructwa (ang. The American Bankruptcy Institute — ABI). Dostarcza on Kongresowi i opinii publicznej ekspertyz dotyczących upadłości przedsiębiorstw, analizuje przyczyny i skutki. Skupia on kilkanaście tysięcy osób różnych zawodów: od prawników, księgowych, licytatorów, syndyków, bankierów, kredytodawców, po profesorów wyższych uczelni. Jest centrum edukacji i badań nad upadłością przedsiębiorstw w Stanach Zjednoczonych. Zgromadził bogate dane empiryczne. Współpracuje systematycznie z mediami. Istotną rolę w pracach Instytutu odgrywają analizy dotyczące przyszłości przedsiębiorstw. Jest to ważne, bo otoczenie i powiązania przedsiębiorstw — jak o tym już pisaliśmy wyżej — stają się coraz bardziej złożone, co powoduje trudności w sformułowaniu długofalowej strategii rozwojowej. Chociaż Instytut zajmuje się badaniami zjawisk z przeszłości, jako źródła i podstawy stawiania prognoz, dotyczących efektów innowacyjności czy kreatywności, to jednak najważniejszą rolę mają do spełnienia badania nakierowane na przyszłość, mające umożliwić stawianie trafnych prognoz.

Jak podkreślają np. Matschke i Broesel (2007), o wartości i pozycji przedsiębiorstwa decyduje nie przeszłość, ale zyski, które mogą z niego płynąć w przyszłości. W tym kontekście buduje się możliwe scenariusze przyszłego rozwoju sytuacji w przedsiębiorstwie, branży czy nawet całej gospodarce. Analizuje się też szanse i zagrożenia możliwych ścieżek rozwoju. Poczesne miejsce w tych badaniach zajmują typowe dla szybkiej zmienności otoczenia — wspomniane już na wstępie — niepewność i ryzyko. Celem jest uzyskanie szybkich ocen wpływu decyzji społeczno-gospodarczych, podejmowanych na różnych szczeblach, na wyniki przedsiębiorstwa. Instytut koncentruje się na wykrywaniu symptomów zagrożeń przedsiębiorstw, w celu ostrzeżenia ich przed upadłością. Tylko dostatecznie szybka informacja może doprowadzić do ograniczenia pojawiającego się zagrożenia. Instytut bada też przypadki nadużyć w rachunkowości, np. tak zwaną kreatywną księgowość.

Wczesne badania nad upadłością polskich przedsiębiorstw były prowadzone za pomocą metod dyskryminacyjnych, wprowadzonych do rachunkowości przez Altmana. D. Hadasik (1998) przeprowadziła badania na podstawie sprawozdań finansowych 39 przedsiębiorstw z lat 1991–1997. Oszacowała modele, zawierające od 4 do 7 zmiennych. Skuteczność tych modeli była wysoka, gdyż sięgała od 88,52% do 96,72%. Najważniejszymi zmiennymi w tych modelach były: wskaźnik ogólnego zadłużenia, wskaźnik rotacji należności, cykl odnowienia zapasów i rentowność zapasów.

W swoich badaniach A. Hołda (2001) do oszacowania funkcji dyskryminacyjnej wykorzystał 40 sprawozdań firm, które ogłosiły upadłość w latach 1993–96 oraz 40 sprawozdań firm, które w tym okresie nie upadły. Na podstawie tych danych zbudował model o skuteczności, którą autor oszacował na 92,5%. Zawierał on następujące zmienne: wskaźnik bieżącej płynności, wskaźnik ogólnego zadłużenia, rentowność majątku, wskaźnik cyklu zobowiązań i wskaźnik rotacji aktywów ogółem.

Wyniki badań nad upadłością za pomocą metod dyskryminacyjnych mogą się istotnie różnić pomiędzy sobą w zależności od kraju i okresu, bo podatność na upadłość związana jest nie tylko z krajem, ale jest też inna w różnych okresach. Mianowicie, dominują, jeśli chodzi o znaczenie dla procesu upadłości, różne wskaźniki. Dlatego właśnie praktycznie nie można przeprowadzać badań za pomocą tego samego zestawu zmiennych nie tylko dla przedsiębiorstw z różnych krajów, ale nawet dla różnych okresów dla tego samego przedsiębiorstwa z danego kraju. Powoduje to, że wyniki różnych badań nie można bezpośrednio porównywać. Dlatego podejmuje się coraz nowe próby budowy ogólnych modeli, mających na celu umożliwienie prognozowania bankructwa, niezależnie od kraju.

Model, który tu przedstawiamy i stosujemy w badaniach empirycznych nie odwołuje się do wskaźników finansowych. Jest to model opisujący biologiczne zjawisko powstawania i rozpadu krwinek, zaproponowany przez Ważewską-Czyżewską i Lasotę (1976), który został zaadaptowany do opisu upadłości i powstawania przedsiębiorstw.

3. OGÓLNA POSTAĆ MODELU

Niech $N(t, a)$ oznacza ilość przedsiębiorstw, które w chwili t nie przekraczają wieku a . Wtedy $N(t) = \lim_{a \rightarrow \infty} N(t, a)$ będzie ogólną ilością przedsiębiorstw w chwili t .

Funkcja $n(t, a) = \frac{\partial}{\partial a} N(t, a)$ będzie wyrażać gęstość rozkładu wiekowego przedsiębiorstw, dla krótkich przedziałów czasowych $n(t, a)$ oznacza ilość przedsiębiorstw w wieku a w chwili t . Funkcja ta spełnia warunek:

$$\int_0^{\infty} n(t, s) ds = N(t). \quad (1)$$

Przedsiębiorstwa, które w chwili t były w wieku a , są w chwili $t + h$ w wieku $a + h$. Różnica oznacza więc ilość przedsiębiorstw w wieku a , które upadły w przedziale czasowym $(t, t + h)$. Intensywność destrukcji $i(t, a)$ przedsiębiorstw w wieku a w chwili t określić można przez przejście graniczne:

$$i(t, a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n(t, a) - n(t + h, a + h)}{h}.$$

Wtedy iloraz (frakcja) $\lambda(t, a) = \frac{i(t, a)}{n(t, a)}$ oznacza prawdopodobieństwo empiryczne zdarzenia, że przedsiębiorstwo, które w chwili t jest w wieku a , upadnie do chwili $t + 1$. $\lambda(t, a)$ nazwiemy współczynnikiem destrukcji.

Korzystając z twierdzenia o wartości średniej:

$$n(t+h, a+h) - n(t, a) = h \frac{\partial}{\partial t} n(\bar{t}, \bar{a}) + h \frac{\partial}{\partial a} n(\bar{t}, \bar{a}), \quad \bar{t} \in (t, t+h), \quad \bar{a} \in (a, a+h),$$

otrzymujemy:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial a} = -\lambda n. \quad (2)$$

Jest to równanie wykorzystywane w teorii rozpadu krwinek czerwonych, znalezione przez H. von Forstera w roku 1959. Z powyższych rozważań wynika, że nawiązuje ono jedynie do definicji współczynnika destrukcji i może być wykorzystywane również w modelowaniu przeżywalności przedsiębiorstw.

Jeżeli przyjmiemy $a = 0$, to funkcja $n(t, a)$ może być interpretowana, jako liczba powstałych przedsiębiorstw w chwili t :

$$p(t) = n(t, 0). \quad (3)$$

Równanie (2) pozwala wyznaczyć funkcję $n(t, a)$ przy znanym $p(t)$. Aby znaleźć odwrotną zależność, wprowadzimy pojęcie stopnia pobudzenia procesu powstawania przedsiębiorstw. Pochodna $\frac{dp(t)}{dt}$ oznacza przyrost liczby nowych przedsiębiorstw w jednostce czasu (np. w ciągu roku). Iloraz:

$$S(t) = \frac{1}{p(t)} \frac{dp}{dt} \quad (4)$$

oznacza stopę przyrostu nowych przedsiębiorstw w jednostce czasu. Można też mówić o stopniu pobudzenia procesu powstawania przedsiębiorstw. Wiadomo, że zmiana liczby działających przedsiębiorstw w gospodarce stanowi impuls pobudzający (bądź hamujący) dla procesu powstawania przedsiębiorstw.

Ponieważ naszym celem jest stworzenie modelu możliwie prostego, przyjmujemy, że „stopień pobudzenia” procesu powstawania przedsiębiorstw $S(t)$ jest proporcjonalny do zmiany ogólnej liczby przedsiębiorstw na rynku w okresie wcześniejszym:

$$S(t) = -\frac{d}{dt} \gamma N(t-h), \quad (5)$$

gdzie γ jest współczynnikiem proporcjonalności, a przez h oznaczono opóźnienie, z jakim (po zmianie liczby przedsiębiorstw) tworzą się nowe. Ze wzoru (5) wynika, że zmniejszeniu liczby starych przedsiębiorstw towarzyszy zwiększona ilość nowopowstałych, a zwiększeniu liczby przedsiębiorstw w gospodarce towarzyszy zahamowanie procesu powstawania nowych.

Korzystając z (4) i (5) mamy:

$$\frac{dp(t)}{dt} = -p(t) \frac{d}{dt} \gamma N(t-h), \quad (6)$$

a stąd:

$$p(t) = \rho e^{-\gamma N(t-h)}, \quad (7)$$

gdzie ρ jest stałą całkowania. Zestawiając wzory (1), (2), (3) i (7) dostajemy:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial a} &= -\lambda n \\ n(t, 0) &= p(t) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$p(t) = \rho \exp \left\{ -\gamma \int_0^{\infty} n(t-h, a) da \right\}$$

W układzie tym występują trzy współczynniki λ , ρ , γ . Znaczenie λ zostało podane przy wyprowadzaniu równania (2). Jest to prawdopodobieństwo empiryczne, że przedsiębiorstwo, które w chwili t jest w wieku a , upadnie do chwili $t+1$. Współczynnik γ charakteryzuje „pobudliwość” procesu powstawania przedsiębiorstw. Jego znaczenie wynika ze wzoru (6). Jest to stopa wzrostu przedsiębiorstw $\frac{dp}{p}$, spowodowana jednostkową zmianą liczby przedsiębiorstw na rynku. Znaczenie współczynnika ρ jest natomiast związane z „zapotrzebowaniem” rynku na nowe przedsiębiorstwa. Im to zapotrzebowanie (zależne od popytu krajowego i zagranicznego na dobra i usługi) jest większe, tym większy jest współczynnik ρ . Dokładny charakter tej zależności spróbujemy pokazać dalej.

4. ROZWIĄZANIE STACJONARNE, POSTAĆ WSPÓŁCZYNNIKA DESTRUKCJI

Rozwiążemy teraz problem uproszczony (niezależny od czasu). Ponieważ $n(t, a)$, $p(t)$ oraz $\lambda(t, a)$ w rozwiązaniu stacjonarnym nie zależą od czasu, położmy:

$$n(t, a) = \bar{n}(a), \quad p(t) = \bar{p} \quad \text{oraz} \quad \lambda(t, a) = \bar{\lambda}(a).$$

Mamy wtedy:

$$\bar{n}(a) = \bar{p} \exp \left\{ -\int_0^a \bar{\lambda}(s) ds \right\} \quad (9)$$

oraz

$$\bar{p} = \rho \exp \left\{ -\bar{p} \int_0^{\infty} \exp \left[-\int_0^a \bar{\lambda}(s) ds \right] da \right\}. \quad (10)$$

Oznaczamy przez $E(\sigma)$ rozwiązanie równania przestępnego:

$$\sigma E + e^{-E} = 0 \quad \text{dla} \quad \sigma > 0. \quad (11)$$

Za pomocą funkcji $E(\sigma)$ szukane rozwiązanie stacjonarne wyraża się wzorem:

$$\bar{n}(a) = \frac{1}{\gamma c} E\left(\frac{1}{\rho \gamma c}\right) \exp\left\{-\int_0^a \bar{\lambda}(s) ds\right\},$$

gdzie:

$$c = \int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^a \lambda(s) ds\right\} da.$$

Dla dalszego badania rozwiązania stacjonarnego ważna jest postać funkcji $\bar{\lambda}(a)$, która decyduje o charakterze rozwiązania. Z analitycznego punktu widzenia, dobrą okazuje się znana i używana w teorii niezawodności krzywa Gomperta postaci:

$$\bar{\lambda}(a) = K e^{\alpha a}. \quad (12)$$

W ujęciu teorii niezawodności stała K oznacza współczynnik destrukcji (upadłości) przedsiębiorstw w chwili początkowej, natomiast stała stanowi logarytm naturalny względnego współczynnika destrukcji (upadłości) w jednostce czasu:

$$\alpha = \ln \frac{\bar{\lambda}(a+1)}{\bar{\lambda}(a)}.$$

Liczbę α można interpretować jako „podatność przedsiębiorstwa na upadłość”.

Z (12) i (9) dostajemy:

$$n_0(a) := \frac{n(a)}{n(0)} = \exp\left\{-\frac{K}{\alpha} [\exp(\alpha a) - 1]\right\}. \quad (13)$$

Funkcję $n_0(a)$ będziemy nazywać unormowanym rozwiązaniem stacjonarnym.

Rozpatrzmy teraz funkcję $n_0(t)$, która powstanie przez formalną zamianę zmiennej a na t .

$n_0(t)$ będzie krzywą przedstawiającą stosunek liczby przedsiębiorstw, które dotrwały do chwili t , do ogólnej (wyjściowej) liczby przedsiębiorstw. Nazwiemy ją krzywą rozpadu jednowiekowych przedsiębiorstw.

Tabela 1 zawiera dane na temat liczby nowozarejestrowanych przedsiębiorstw w latach 1999–2007 w województwie małopolskich i ich roczne wskaźniki przeżycia.

Tabela 1

Nowozarejestrowane przedsiębiorstwa w latach 1999–2007 i ich roczne wskaźniki przeżycia

Nowo zarejestrowane przedsiębiorstwa	Wskaźnik przeżycia przedsiębiorstw [%]								
	po roku	po 2 latach	po 3 latach	po 4 latach	po 5 latach	po 6 latach	po 7 latach	po 8 latach	po 9 latach
1999 26 240	2000 91,5	2001 84,7	2002 81,6	2003 79,1	2004 74,1	2005 70,1	2006 65,2	2007 62,0	2008 59,6
2000 25 150	2001 89,1	2002 84,5	2003 80,0	2004 74,6	2005 70,0	2006 64,7	2007 60,8	2008 58,1	
2001 19 434	2002 93,8	2003 89,6	2004 83,1	2005 77,3	2006 71,2	2007 66,6	2008 63,1		
2002 16 735	2003 93,4	2004 84,2	2005 76,8	2006 69,4	2007 64,6	2008 63,1			
2003 20 377	2004 83,8	2005 76,0	2006 68,7	2007 63,9	2008 59,2				
2004 18 650	2005 82,6	2006 73,4	2007 67,5	2008 63,4					
2005 20 564	2006 81,4	2007 71,2	2008 65,7						
2006 24 367	2007 82,6	2008 71,4							
2007 24 119	2008 85,1								

Źródło: dane uzyskane z WUS w Krakowie.

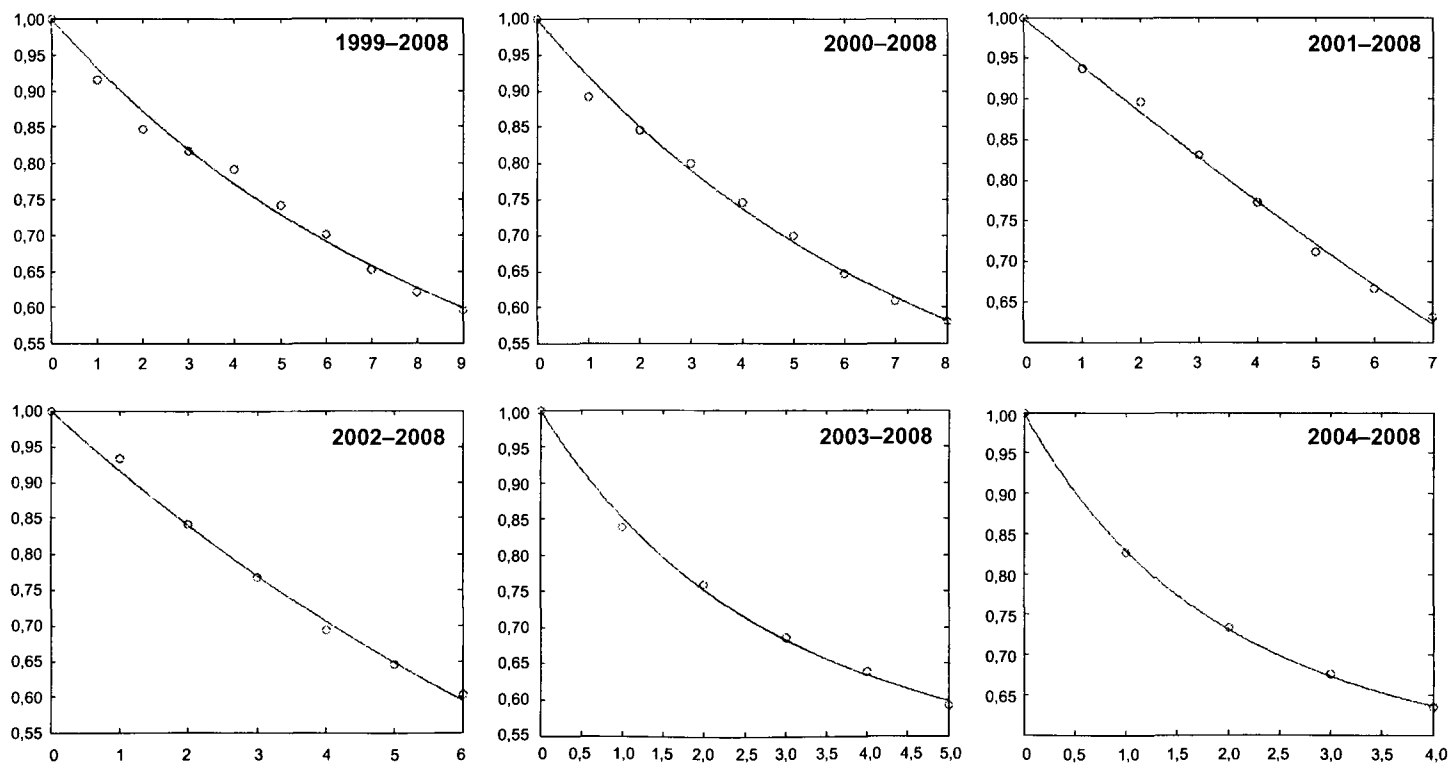
Rodzina funkcji postaci (13) pozwala na dobre przybliżanie danych. Rycina 1 (s. 16) przedstawia dane z lat 1999–2004 wraz z dopasowanymi metodą najmniejszych kwadratów krzywymi postaci (13). Tabela 2 zawiera wyestymowane wartości parametrów K i α . Wyniki otrzymano za pomocą programu R.

Tabela 2

Parametry K i α otrzymane za pomocą metody najmniejszych kwadratów

	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
K	0,0726	0,0864	0,0593	0,0874	0,1818	0,2276	0,2575
α	-0,0566	-0,0640	0,0368	-0,0034	-0,2559	-0,4027	-0,4558

Źródło: obliczenia własne.



Ryc. 1. Dane z lat 1999–2004 wraz z dopasowanymi krzywymi rozpadu jednowiekowych przedsiębiorstw

Jak widać, parametry dla poszczególnych lat przyjmują różne wartości. Można zauważyć, że w latach 1999–2002 otrzymaliśmy zbliżone wartości, natomiast począwszy od roku 2003 nastąpiła znaczna zmiana, zarówno dla wartości K , jak i dla α . Pamiętając, że stała K oznacza współczynnik destrukcji przedsiębiorstw w chwili początkowej, jako dopuszczalne przyjąć można wyniki z lat 1999–2002. W pozostałych przypadkach zbyt duże wartości parametrów mają prawdopodobnie związek ze zbyt małą liczbą obserwacji w próbie.

Interpretując otrzymane wyniki dla stałej K , można stwierdzić, że około 7–8% przedsiębiorstw kończy swoją działalność niedługo po zarejestrowaniu się do systemu. Wartości otrzymane dla parametru α są (zgodnie z przewidywaniami) ujemne. Oznacza to, że zachodzi zależność:

$$\bar{\lambda}(a+1) < \bar{\lambda}(a), \quad (14)$$

czyli prawdopodobieństwo upadku przedsiębiorstwa z czasem jest coraz mniejsze. Odstępstwem od reguły wydaje się na podstawie obliczeń rok 2001, w którym wartość parametru jest dodatnia i bliska zera. Na wykresie przedstawiającym dane dotyczące roku 2001 widać dużą zgodność punktów empirycznych z przebiegiem linii prostej. Wyraźnie można zauważyć tam również zaburzenie powstałe prawdopodobnie przez wprowadzenie nowego systemu PKD.

Wyznaczenie wartości dla K i α , przy założeniu poprawności modelu, pozwala również na prognozowanie przeżywalności przedsiębiorstw w kolejnych latach. Możemy także przewidywać prawdopodobieństwo ogłoszenia upadłości w zależności od wieku przedsiębiorstwa.

5. MODEL ZREDUKOWANY

W modelu tym szczególną uwagę zwracamy na zachowanie się ogólnej liczby przedsiębiorstw w czasie, czyli funkcji $N(t)$. Wprowadźmy współczynnik:

$$\mu = \frac{1}{N(t)} \int_0^{\infty} \lambda(t, a) n(t, a) da = \frac{\int_0^{\infty} \lambda(t, a) n(t, a) da}{\int_0^{\infty} n(t, a) da}. \quad (15)$$

Wyrażenie w liczniku to ilość przedsiębiorstw zlikwidowanych w jednostce czasu, natomiast mianownik to całkowita ilość przedsiębiorstw działających w chwili t . Współczynnik μ wyraża więc prawdopodobieństwo empiryczne ogłoszenia upadłości przedsiębiorstwa w jednostce czasu.

Całkując względem a równanie (2) w przedziale $[0, \infty)$ dostajemy:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} n(t, a) da + \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} n(t, a) da = - \int_0^{\infty} \lambda(t, a) n(t, a) da. \quad (16)$$

Uwzględniając wzór (1) można pierwszy składnik napisać w postaci:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} n(t, a) da = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} n(t, a) da = \frac{\partial}{\partial t} N(t). \quad (17)$$

Wykonując całkowanie drugiego składnika i przyjmując uproszczone założenie, że z czasem każde przedsiębiorstwo przestanie istnieć ($\lim_{a \rightarrow \infty} n(t, a) = 0$) mamy:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} n(t, a) da = n(t, \infty) - n(t, 0) = 0 - p(t) = -\rho e^{-\gamma N(t-h)}. \quad (18)$$

Stąd i z definicji współczynnika μ dostajemy ostatecznie:

$$\frac{\partial}{\partial t} N(t) = -\mu N(t) + \rho e^{-\gamma N(t-h)}. \quad (19)$$

Jest to poszukiwane równanie dla ogólnej liczby przedsiębiorstw na rynku, uwzględniające sprzężenie zwrotne. Zawiera ono cztery parametry, których interpretację już znamy.

6. EKSPERYMENTALNA WERYFIKACJA UKŁADU ZREDUKOWANEGO

W naszych obliczeniach korzystamy z danych dotyczących województwa małopolskiego, otrzymanych z Wojewódzkiego Urzędu Statystycznego w Krakowie. Ilość nowozarejestrowanych przedsiębiorstw znajdziemy w tabeli 1. Tabela 3 zawiera ogólną ilość zarejestrowanych przedsiębiorstw w województwie małopolskim w latach 1999–2008.

Tabela 3

Podmioty gospodarki narodowej zarejestrowane w systemie REGON
w województwie małopolskim

Rok	1999	2000	2001	2002	2003
Ilość	242 795	251 821	265 987	278 180	287 816
Rok	2004	2005	2006	2007	2008
Ilość	288 773	289 712	289 386	293 845	301 573

Źródło: dane uzyskane z WUS w Krakowie.

Zasadniczą rolę w weryfikacji eksperymentalnej równania (19) ma parametr h , mówiący o opóźnieniu, z jakim na wiadomość o wyrejestrowaniu przedsiębiorstwa tworzy się nowe. Do dyspozycji mamy dane roczne, rozważymy zatem wyłącznie następujące przypadki: $h = 0$, $h = 1$.

Nasze rozważania zaczniemy od równania (7) i wyznaczenia za jego pomocą wartości parametrów ρ i γ . Otrzymane wartości zamieszczone są w tabeli 4.

Tabela 4

Otrzymane wartości stałych ρ i γ dla danych z lat 1999–2008

	ρ	γ
$h = 0$	32766,44	$1,385529 \cdot 10^{(-6)}$
$h = 1$	27,17041	$9,119105 \cdot 10^{(-7)}$

Źródło: obliczenia własne.

Okazuje się jednak, że występuje tutaj rozbieżność między wartościami otrzymanymi teoretycznie, a wartościami rzeczywistymi. Wartości rzeczywiste i otrzymane teoretycznie zawiera tabela 5.

Tabela 5

Teoretycznie otrzymane wartości liczby powstałych przedsiębiorstw na podstawie danych z lat 1999–2008

Rok	Liczba nowo powstałych przedsiębiorstw	dla $h = 0$	dla $h = 1$
1999	26 240	23 406,30	23 166,60
2000	25 150	23 115,41	22 857,91
2001	19 434	22 666,14	22 670,55
2002	16 735	22 286,44	22 379,57
2003	20 377	21 990,87	22 132,11
2004	18 650	21 961,73	21 938,48
2005	20 564	21 933,18	21 919,35
2006	24 367	21 943,63	21 900,58
2007	24 119	21 807,94	21 907,46
2008	27 059	21 575,68	21 818,20

Źródło: obliczenia własne.

Prawdopodobną przyczyną rozbieżności jest wprowadzenie nowego systemu Polskiej Klasyfikacji Działalności PKD2004, które zaowocowało wyrejestrowaniem dużej liczby przedsiębiorstw, które już wcześniej zakończyły swoją działalność, ale nie zostały wyrejestrowane z systemu. Dlatego też kolejną symulację przeprowadzimy dla danych z lat 2003–2008.

Tabela 6

Otrzymane wartości stałych ρ i γ dla danych z lat 2003–2008

	ρ	γ
$h = 0$	54,42361	$-2,062912 \cdot 10^{(-5)}$
$h = 1$	81,47604	$-1,950858 \cdot 10^{(-5)}$

Źródło: obliczenia własne.

W tym przypadku dane teoretyczne znacznie lepiej pasują do rzeczywistych, poszczególne wartości zawiera tabela 7.

Tabela 7

Teoretycznie otrzymane wartości liczby powstałych przedsiębiorstw
na podstawie danych z lat 2003–2008

Rok	Liczba nowo powstałych przedsiębiorstw	dla $h = 0$	dla $h = 1$
2003	20 377	16 905,71	18 531,10
2004	18 650	20 623,55	22 363,61
2005	20 564	21 034,74	22 785,06
2006	24 367	21 446,18	23 206,29
2007	24 119	21 294,52	23 051,08
2008	27 059	23 354,89	25 154,89

Źródło: obliczenia własne.

W modelu (19) pojawia się dodatkowo stała μ , wyrażająca prawdopodobieństwo empiryczne upadłości przedsiębiorstwa w jednostce czasu. Wartości μ dla poszczególnych lat zawiera tabela 8.

Tabela 8

Prawdopodobieństwo upadłości przedsiębiorstwa w latach 2003–2008

	2003	2004	2005	2006	2007	2008
μ	0,037319	0,06127	0,06774	0,085396	0,066845	0,064101

Źródło: obliczenia własne.

Średnia wartość dla lat 2003–2008 stałej μ wynosi 0,063778.

Korzystając z modelu (19) i otrzymanych parametrów możemy prognozować ilość nowozarejestrowanych przedsiębiorstw i ogólną liczbę przedsiębiorstw zarejestrowanych w systemie REGON w roku 2009 (dane te obecnie nie są jeszcze dostępne). W zależności od przyjętego opóźnienia otrzymane prognozy zawarto w tabeli 9.

Tabela 9

Prognozy ilości zarejestrowanych przedsiębiorstw na rok 2009

	Nowo zarejestrowane	Ogólnie
Prognoza dla $h = 0$	46 283	327 001
Prognoza dla $h = 1$	29 248	310 987
Wartość faktyczna	31 388	314 017

Źródło: obliczenia własne.

Patrząc krytycznie na otrzymane wyniki należałoby odrzucić opóźnienie $h = 0$. Ogólna liczba przedsiębiorstw wydaje się możliwa do przyjęcia, jednak patrząc na przewidywaną liczbę nowozarejestrowanych podmiotów model z opóźnieniem równym zero podaje zbyt dużą wartość. Znacznie lepiej prezentuje się model, w którym opóźnienie wynosi rok. Otrzymane wartości wpisują się właściwie w rosnący trend, błąd prognozy ex-post nie jest duży. Faktyczne wielkości dla roku 2009 mieszczą się pomiędzy prognozą dla $h = 1$ i tą dla $h = 0$. Można przypuszczać, że gdybyśmy mieli dane przedzielone okresem krótszym niż rok, to moglibyśmy otrzymać jeszcze lepsze prognozy.

7. PROGNOZY DŁUGOTERMINOWE

Niewielka ilość danych, którą dysponujemy niestety nie jest wystarczająca dla prognozowania ilości zarejestrowanych przedsiębiorstw w dłuższej perspektywie. Jeśli przyjrzymy się dokładniej danym, zobaczymy że w badanym okresie w województwie małopolskim zwiększa się zarówno ogólna liczba przedsiębiorstw w systemie REGON, jak i stopa przyrostu tych nowozarejestrowanych. Spowodowane jest to głównie tym, że w ostatnich latach mieliśmy do czynienia w Polsce z dużym wzrostem gospodarczym. Skutkiem tego jest sytuacja, w której prognozujemy stale rosnący trend. Prowadzi to do wniosku, że nasz model będzie miał ciekawsze zastosowanie do jednostek terytorialnych o „ustabilizowanej” liczbie przedsiębiorstw, w których spadek ogólnej liczby przedsiębiorstw prowadzi do zwiększonej liczby nowo powstałych i odwrotnie. Tego typu zależność model wskazał wyłącznie dla danych z województw lubelskiego, podkarpackiego, podlaskiego i kujawsko-pomorskiego.

Przyjrzymy się szczegółowo danym z województwa lubelskiego. Tabela 10 zawiera liczbę nowo zarejestrowanych i ogólną liczbę przedsiębiorstw z lat 2003–2008, natomiast tabela 11 podaje obliczone wartości parametrów modelu (19).

Tabela 10

Przedsiębiorstwa w systemie REGON, województwo lubelskie

Rok	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Nowo zarejestrowane	—	12 079	10 052	11 191	12 489	12 825	13 652
Ogólna liczba	149 411	154 849	149 478	149 019	150 579	151 514	154 595

Źródło: dane uzyskane z WUS w Krakowie.

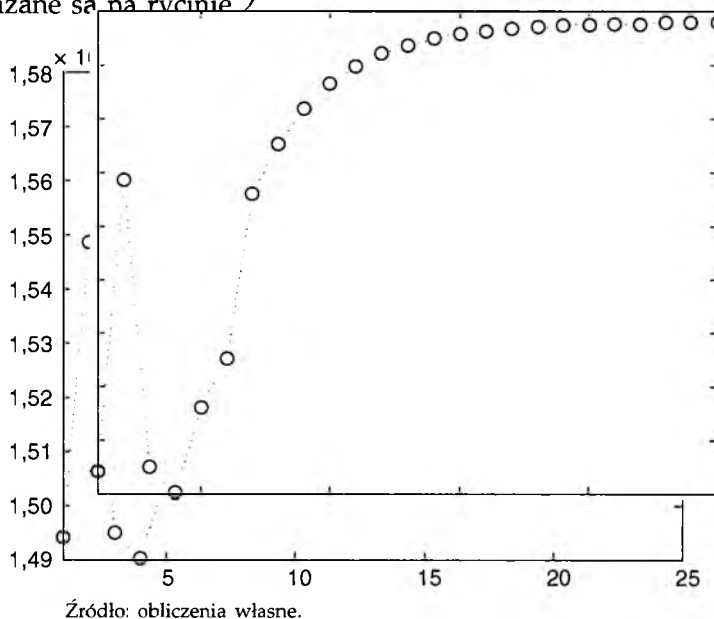
Tabela 11

Wyestymowane parametry modelu, województwo lubelskie

Parametr	μ	ρ	γ
Wartość	0,064969137	387 769	0,00002302581

Źródło: obliczenia własne.

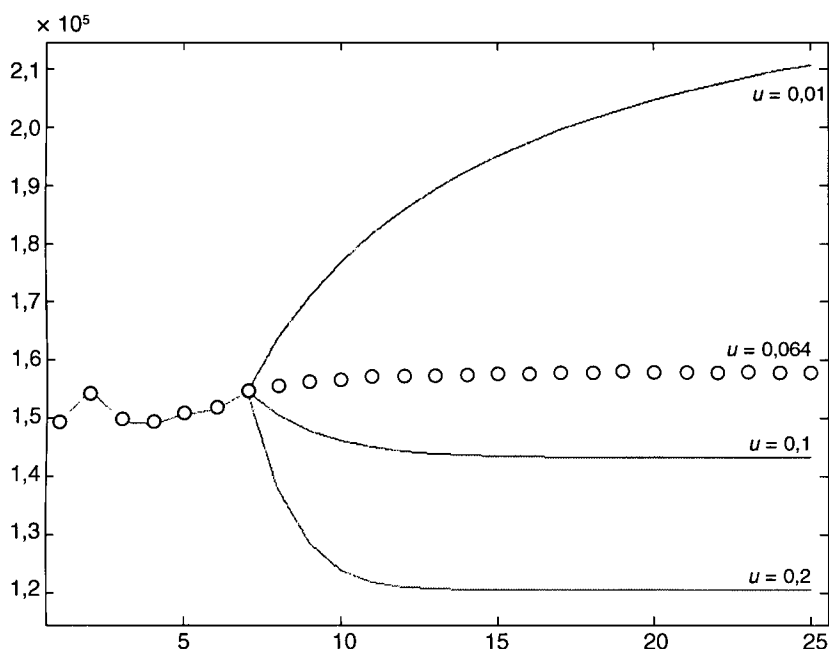
Prognozy otrzymane za pomocą modelu (19) dla wyznaczonych parametrów pokazane są na rycinie 2



Ryc. 2 Prognozy długoterminowe dla województwa lubelskiego

Model wskazuje, że ogólna liczba zarejestrowanych przedsiębiorstw wzrasta do poziomu około 158 000, na którym się prawdopodobnie ustabilizuje. W roku 2009 ogólna liczba przedsiębiorstw w województwie lubelskim wynosiła 156 180, czyli nie odbiegała znacząco od prognozowanej przez model. Kolejnym zastosowaniem modelu (19) może być symulacja zachowania ogólnej ilości zarejestrowanych przedsiębiorstw w zależności od wartości parametru μ . Przypomnijmy, że μ jest interpretowane jako prawdopodobieństwo empiryczne ogłoszenia upadłości przedsiębiorstwa w jednostce czasu. Prognozy tego typu mogą potencjalnie być użyteczne w sytuacjach kryzysowych, gdy prawdopodobieństwo ogłoszenia bankructwa może ulec zwiększeniu lub w modelowaniu ogólnej liczby przedsiębiorstw w sytuacji zwiększonej opieki państwa bądź władz regionalnych nad przedsiębiorstwami. Rycina 3 zawiera prognozy uzyskane za pomocą modelu w zależności od różnych wartości μ .

Z obliczeń wynika zatem, że gdyby prawdopodobieństwo empiryczne (frakcja) upadku przedsiębiorstwa spadło z ok. 6,4% do 1%, to ogólna liczba przedsiębiorstw ustabilizowałaby się na poziomie 210 000. W przypadku zwiększenia prawdopodobieństwa empirycznego likwidacji do 10%, ogólna liczba spadłaby i w perspektywie kilku lat mogłaby dojść do poziomu 143 000, natomiast w przypadku 20% do 120 000.



Źródło: obliczenia własne.

Ryc. 3. Prognozy długoterminowe dla województwa lubelskiego dla różnych wartości prawdopodobieństwa wyrejestrowania przedsiębiorstwa z systemu

8. UWAGI KOŃCOWE

Powstawanie i upadłości przedsiębiorstw są nieodłącznym zjawiskiem gospodarki rynkowej. Z nowo powstałych przedsiębiorstw tylko te potrafią utrzymać się na rynku, które w porę zareagują na ciągle zmieniające się warunki gospodarowania, wynikające głównie ze zmienności otoczenia. Pozostałe, które nie spełniają oczekiwań rynku, poprzez upadłość uwalniają siłę roboczą i inne zasoby, które mogą być i są wykorzystywane przez nowo powstające przedsiębiorstwa. Proces upadłości nieefektywnych przedsiębiorstw, choć bolesny tak dla zatrudnionych w tych przedsiębiorstwach pracowników, jak i właścicieli, a także kierownictwa, dawców kapitału, firm kooperujących itd., poprawia innowacyjność i kreatywność, a przez to efektywność przedsiębiorstw i to zarówno nowo powstających, jak i już istniejących, które nie upadły. W konsekwencji przyspiesza rozwój społeczno-gospodarczy poszczególnych krajów. Ten dynamiczny proces twórczej destrukcji powinien być jednak monitorowany, tak aby można go było kontrolować. Istotne znaczenie mają w tym kontekście próby prognozowania upadłości przedsiębiorstw na podstawie wskaźników finanso-

wych przedsiębiorstw lub za pomocą modeli, w tym ekonometrycznych. W ten ostatni nurt wpisują się zaprezentowane wyżej autorskie wyniki badań nad dynamiką tego procesu za pomocą modelu, będącego równaniem różniczkowym cząstkowym.

Niewątpliwą zaletą prezentowanego w pracy modelu jest fakt, że jest on oparty na stosunkowo prostych założeniach i prowadzi do interesujących zależności. Weryfikacja modelu oparta na danych pochodzących z województwa małopolskiego pokazała jego zgodność z danymi rzeczywistymi. Wykorzystując jego rozwiązanie stacjonarne można przewidywać prawdopodobieństwo ogłoszenia upadłości w zależności od wieku przedsiębiorstwa. Uproszczony model pozwala na przewidywanie przyszłej ilości zarówno nowych przedsiębiorstw, jak i ich ogólnej liczby. Jak pokazały obliczenia na podstawie danych z województwa lubelskiego model może być wykorzystywany w symulacjach zachowań ogólnej liczby przedsiębiorstw dla zmieniających się warunków sprzyjających bądź niesprzyjających bankructwu.

Te wstępne, zachęcające wyniki motywują do dalszych badań nad zastosowaniami tego modelu i tworzeniem jego wersji, odpowiadających postawionym zadaniom badawczym.

Dalsze badania powinny się koncentrować na zastosowaniu modelu także w przypadku innych regionów Polski, w celu porównania wyników dla tych regionów z wynikami dla Małopolski. Problemem są zbyt krótkie szeregi czasowe wymaganych danych dostępne dla poszczególnych regionów w Polsce. Dlatego bardzo cenne byłoby zastosowanie modelu do regionów krajów o ustabilizowanej gospodarce rynkowej, w przypadku których takie szeregi czasowe są znacznie dłuższe. O ile uda się pozyskać dane zagraniczne, taki model może być zweryfikowany także dla innych krajów.

BIBLIOGRAFIA

- Altman E. 1968. *Financial Ratios, Discriminant Analysis and the Prediction of the Corporate Bankruptcy*, The Journal of Finance 23, 589–609.
- Bebchuk L.A. 2002. *Ex Ante Costs of Violating Absolute Priority in Bankruptcy*, The Journal of Finance 47, 445–460.
- Białasiewicz M., Buczkowski T. 1996. *Restrukturyzacja przedsiębiorstw i jej skutki na przykładzie niektórych przedsiębiorstw Szczecina*, [w:] *Przedsiębiorstwo w procesie transformacji*, red. W. Janasz, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego 172, 193–201.
- Bratnicki M. 2001. *Pułapki i problemy zarządzania strategicznego*, [w:] *Instrumenty zarządzania we współczesnym przedsiębiorstwie*, red. K. Zieniewicz, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, 3–20.
- Czajka D. 1999. *Przedsiębiorstwo w kryzysie, upadłość lub układ*, Wydawnictwo Zrzeszenia Prawników Polskich, 17–19.
- Durlik I. 1998. *Restrukturyzacja procesów gospodarczych: reengineering, teoria i praktyka*, Agencja Wydawnicza Placet, Warszawa.
- Encyklopedia biologiczna* 1998, red. Z. Otałęga, Agencja Publicystyczno-Wydawnicza Opres, Kraków.

- Foster R., Kaplan S. 2003. *Twórcza destrukcja*, Wydawnictwo Galaktyka, Łódź.
- Frederick W.C., Davis K., Post J.E. 1988. *Corporate Social Responsibility and Business Ethics*, New York, McGraw-Hill Publishing Company, 28–29.
- Greiner L.E., Schein V.E. 1988. *Power and Organization Development*, Power and Organization Development Addison-Wesley Reading Massachusetts.
- Hadasik P. 1998. *Upadłość przedsiębiorstw w Polsce i metody jej prognozowania*, ZN-seria II, Zeszyt 153, AE Poznań, 81–91.
- Handy Ch. 1996. *Wiek paradoksu*, Dom Wydawniczy ABC, Warszawa.
- Holda A. 2001. *Prognozowanie bankructwa jednostki w warunkach gospodarki polskiej z wykorzystaniem funkcji dyskryminacyjnej* ZH, Rachunkowość, 5, 306–310.
- Hurst D.K. 1995. *Crisis and renewal: meeting the challenge of organizational change*, Harvard Business School Press, Boston.
- Koźmiński A.K., Piotrowski W. 1999. *Zarządzanie. Teoria i praktyka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Majchrzak J. 2003. *Spółeczny wymiar zarządzania przedsiębiorstwem. Mit czy konieczność?*, „Współczesne tendencje w zarządzaniu”, Zeszyty Naukowe 33, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Poznań 53–66.
- Matschke J.M., Broesel G. 2007. *Unternehmensbewertung*, Gabler-Verlag, Wiesbaden.
- Mączyńska E. 2009. *Meandry upadłości przedsiębiorstw*, Szkoła Główna Handlowa, Warszawa.
- Osbert-Pociecha G. 2004. *Twórcza destrukcja jako uwarunkowanie efektywności przedsiębiorstwa*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego 1060, 332–342.
- Pieńkowska M. 2005. *Ujęcie upadłości w teorii przedsiębiorstwa*, [w:] *Ekonomiczne aspekty upadłości przedsiębiorstw w Polsce*, red. E. Mączyńska, Materiały i Prace Instytutu Funkcjonowania Gospodarki Narodowej, XCII, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Warszawa, 19–27.
- Perechuda K. 1999. *Metody zarządzania przedsiębiorstwem*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im O. Langego we Wrocławiu, Wrocław.
- Schonfelder B. 2003. *Death or Survival. Post-Communist Bankruptcy Law in Action*, Freiberg.
- Schumpeter J. 1934. *The Theory of Economic Development: An inquiry into profits, capital, credit, interest and the business cycle*, Harvard University Press, Harvard.
- Ważewska-Czyżewska M., Lasota A. 1976. *Matematyczne problemy dynamiki układu krwinek czerwonych*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria III. Matematyka Stosowana VI, 24–40.
- Zdyb M. 2008. *Jakie czynniki generują upadłości przedsiębiorstw w Polsce? Przyczyny upadłości przedsiębiorstw w Polsce*, Biuletyn E-rachunkowość.
- Zedler F. 2003. *Prawo upadłościowe i naprawcze — wprowadzenie*, Zakamycze, Kraków.
- Zimniewicz K. 2000. *Współczesne koncepcje i metody zarządzania*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.

WYBRANE ZASTOSOWANIA GŁĘBI STUDENTA W ODPORNEJ ANALIZIE STATYSTYCZNEJ*

DANIEL KOSIOROWSKI

Katedra Statystyki
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie
PL 31-510 Kraków, ul. Rakowicka 27
e-mail: daniel.kosiorowski@uek.krakow.pl

Praca była przedstawiona przez autora na posiedzeniu Komisji Nauk Ekonomicznych i Statystyki Oddziału PAN w Krakowie, 17 grudnia 2010 r.

ABSTRACT

D. Kosiorowski. *Certain Applications of Student Depth in Robust Economic Analysis*. Folia Oeconomica Cracoviensia 2010, 51: 27–55.

In this paper we present selected application of Mizera & Muller location — scale depth. We focus our attention on a Student depth function and propose several statistical procedures based on that statistical depth function.

KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

location — scale depth, student median, robustness
głębia położenia — rozrzutu, mediana studenta, odporność

1. WPROWADZENIE

Z formalnego punktu widzenia procedury odporne rozpatruje się obecnie jako funkcjonały statystyczne, definiowane na pewnej przestrzeni funkcji rozkładu (por. Huber i Ronchetti 2009). Statystyk analizuje zachowanie się procedury w pewnym otoczeniu zakładanego przez nią rozkładu. Rozpatrywane w badaniu rozkłady precyzują wiedzę statystyka na temat mechanizmu losowego,

* Niniejsza praca powstała dzięki częściowemu wsparciu finansowemu, udzielonemu ze strony Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego RP w postaci grantu nr NN 111 193036.

rzządzającego zjawiskiem. Otoczenie zakładanego przez procedurę rozkładu ujmuje możliwe odstępstwa od przyjmowanych założeń odnośnie do zjawiska. Odstępstwa mogą dotyczyć występowania pośród danych: obserwacji obarczonych sporym błędem, błędną specyfikację rozpatrywanego zjawiska itd. Otoczenia konstruowane są z wykorzystaniem stosownej odległości pomiędzy rozkładami prawdopodobieństwa. Wykorzystuje się w tym celu między innymi odległość Kołmogorowa, odległość Prohorowa (por. Jureckova i Picek 2006).

Istnieje co najmniej kilka, po części alternatywnych a po części komplementarnych, podejść do pomiaru odporności procedury statystycznej. Znane są też podejścia mające charakter wyłącznie jakościowy. Historycznie pierwsza własność procedury, która została wykorzystana do pomiaru jej odporności, wiązała się z pojęciem efektywności względnej estymatora w pewnym zakresie rozpatrywanych modeli. Obecnie centralną rolę odgrywają pojęcia: funkcji wpływu Hampela (patrz Hampel i in. 1986) oraz punktu załamania i punktu załamania próby skończonej Donoho i Hubera (Donoho i Huber 1983).

Przypuśćmy, że zastanawiamy się nad wpływem na wartość pewnej statystyki $T_{n-1} = T(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, zmieszania zbioru obserwacji $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ z obserwacją odstającą $\tilde{\mathbf{x}}$. Oznaczmy taki zmieszany zbiór danych jako $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \tilde{\mathbf{x}}$ oraz wartość statystyki przy takim zmieszaniu $T_n = T(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \tilde{\mathbf{x}})$. Wpływ na wartość statystyki w przedstawionej sytuacji można mierzyć za pomocą zaproponowanej przez Tukey'a krzywej wrażliwości.

Krzywą wrażliwości (ang. *sensitivity curve*) nazywamy:

$$SC_n(\tilde{\mathbf{x}}) = n(T_n - T_{n-1}). \quad (1)$$

Z definicji wynika natychmiast, że:

$$T_n = T_{n-1} + 1/n SC_n(\tilde{\mathbf{x}}). \quad (2)$$

Niezmiennie popularna obecnie funkcja wpływu jest wersją krzywej wrażliwości w przypadku populacji. Funkcja wpływu została zaproponowana przez F. Hampela (Hampel 1975).

Rozważmy mieszanie dwóch rozkładów $F_\epsilon = (1 - \epsilon)F + \epsilon\delta_{\mathbf{x}}$, gdzie $\delta_{\mathbf{x}}$ oznacza rozkład skoncentrowany w punkcie. Możemy określić jakościowo odporność procedury porównując $T(F)$ i $T(F_\epsilon)$ w sytuacji, gdy $\epsilon \rightarrow 0$. Aby ująć odporność ilościowo, wygodnie jest posłużyć się funkcją wpływu (ang. *influence function*) definiowaną:

$$IF(\mathbf{x}; T, F) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T(F_\epsilon) - T(F)}{\epsilon}. \quad (3)$$

Funkcja wpływu jest jedną z najważniejszych charakterystyk funkcjonału statystycznego, estymatora. Wartość $IF(\mathbf{x}; T, P)$ mierzy efekt zakłócenia funkcjonału T poprzez pojedynczą wartość \mathbf{x} . Odporny funkcjonał T powinien mieć ograniczoną funkcję wpływu.

Bez wątpienia najciekawszą (Davies i Gather 2005, Davies 2002) z praktycznego punktu widzenia miarą odporności procedury statystycznej jest wersja koncepcji punktu załamania odnosząca się do prób skończonych, a mianowicie tzw. punkt załamania próby skończonej, wprowadzony przez Donoho i Hubera¹ (Donoho i Huber 1983).

Przypuśćmy, że dysponujemy próbą $X^n = \{x_1, \dots, x_n\}$, złożoną z n obserwacji generowanych przez zakładany model oraz niech $Y^m = \{y_1, \dots, y_m\}$ oznacza m dowolnych (być może szczególnie odstających) obserwacji. Oznaczmy przez $Z^{n+m} = X^n \cup Y^m$ próbę powstałą z połączenia powyższych zbiorów obserwacji. Określmy ją mianem ε_m zmieszanej, próby gdzie $\varepsilon_m = \frac{m}{n+m}$.

Wielkość $|T(X^n \cup Y^m) - T(X^n)|$ oznacza obciążenie statystyki, natomiast maksymalne obciążenie statystyki T , powstające przy ε_m zmieszaniu, oznaczmy jako:

$$B(\varepsilon_m, T, X^n) = \sup_{Y^m} |T(X^n \cup Y^m) - T(X^n)|. \quad (4)$$

Punkt załamania próby skończonej (Donoho i Huber 1983) definiujemy jako:

$$BP(T, X^n) = \inf \{ \varepsilon_m : B(\varepsilon_m, T, X^n) = \infty \}. \quad (5)$$

Punkt załamania próby skończonej posiada odpowiednik w populacji. Przypuśćmy, że otoczenia rozkładu generującego dane definiujemy z wykorzystaniem odległości mieszanki dwóch rozkładów. Niech F oznacza zakładany rozkład, natomiast H oznacza rozkład reprezentujący błąd, zaburzenie (odstępstwo od modelu). Rozważamy model mieszanki postaci: $F_\varepsilon = (1 - \varepsilon)F + \varepsilon H$. Wprowadzając pojęcie maksymalnego obciążenia przy tego rodzaju ε — zmieszaniu, tzn.:

$$B(\varepsilon, T, F) = \sup |T(F_\varepsilon) - T(F)|, \quad (6)$$

otrzymamy definicję punktu załamania procedury statystycznej F. Hampela (Hampel 1968):

$$\varepsilon^*(T, F) = \inf \{ \varepsilon : B(\varepsilon, T, F) = \infty \}. \quad (7)$$

Punkt załamania próby skończonej wskazuje na maksymalną frakcję obserwacji odstających w próbie, która nie sprawia, że procedura statystyczna „łamie się” — np. obciążenie wskazania estymatora staje się nieakceptowalne. Koncepcja punktu załamania zależy od odległości wykorzystywanej do konstruowania otoczeń zakładanego rozkładu generującego obserwacje. Zależy

¹ Należy podkreślić, że koncepcja punktu załamania ma wiele, często istotnie różniących się wariantów. Mamy tutaj m.in. zastosowanie pojęcia w przypadku prób zależnych, szeregów czasowych itd. (por. Genton i Lucas 2003).

także od zagadnienia, do którego się stosuje. Czymś odmiennym jest „załamanie się” estymatora położenia centrum, estymatora wielowymiarowego rozrzutu czy estymatora parametrów funkcji regresji (por. Davies 2002).

Zagadnienia odporności wiążą się niemalże z każdą procedurą statystyczną wykorzystywaną w ekonomii. Można mówić o odpornej, bankowej procedurze scoringowej, odpornej prognozie inflacji bądź odpornym szacowaniu ryzyka ubezpieczeniowego. Warto zauważyć, że statystyka pojawia się w ekonomii nie tylko na poziomie szacowania, weryfikacji pewnego modelu, ale także na poziomie pojęć, którymi posługuje się ekonomista. Produkt narodowy brutto, tempo wzrostu gospodarczego, dobrobyt, sprawiedliwość społeczna, dyskryminacja na rynku pracy — to agregaty statystyczne. Można zadać pytanie: czy agregaty te są odporne?

Zdaniem autora zasadą jest wyodrębnienie ze zbioru postępowań, wykorzystujących statystykę w ekonomii, tzw. odpornej analizy statystycznej. Analizę, którą można opisać jako ciągłe stosowanie wysoce efektywnych narzędzi statystycznych w procesie decyzyjnym, z naciskiem na poszukiwanie tendencji wyznaczonej przez większość rozpatrywanych obiektów. Mamy tu na uwadze analizę opierającą się na ustawicznie aktualizowanych danych (co godzinę, co dzień itd.), dotyczących np. sytuacji na rynku płodów rolnych, na rynku nieruchomości itd. Prezentowane w dalszej części pracy odporne procedury indukowane przez uogólnienia statystycznej funkcji głębi Tukey’a mogą — zdaniem autora — znaleźć szereg zastosowań w tak rozumianej odpornej analizie statystycznej. Autor żywi nadzieję, że prezentowane pojęcia w przyszłości znajdą też zastosowanie w ekonometrycznym modelowaniu zjawisk ekonomicznych, stając się alternatywą np. dla procesów GARCH, SV. Zagadnienia te wymagają jednakże dalszych studiów.

2. UOGÓLNIENIA GŁĘBI DOMKNIĘTEJ PÓŁPRZESTRZENI TUKEY’A

Rozwijany obecnie nurt odpornej, wielowymiarowej analizy danych, określany mianem koncepcji głębi danych, został zapoczątkowany przez propozycje Johna Tukey’a — miał on na celu rozszerzenie na przypadek wielowymiarowy jednowymiarowych procedur statystycznych, opierających się o statystyki porządkowe i rangi (Tukey 1975). Statystyczna funkcja głębi punktu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ względem rozkładu prawdopodobieństwa F określonego na \mathbb{R}^d przyporządkowująca punktowi \mathbf{x} najmniejsze prawdopodobieństwo zgromadzone na domkniętej półprzestrzeni, do której brzegu należy \mathbf{x} , nazywamy głębią domkniętej półprzestrzeni bądź głębią Tukey’a.

$$TD(\mathbf{x}; F) = \inf_H \{P(H) : \mathbf{x} \in H \text{ i } H \text{ jest domkniętą półprzestrzenią } \mathbb{R}^d\}. \quad (8)$$

W przypadku próby $X^n = \{x_1, \dots, x_n\}$ rozkład prawdopodobieństwa F zastępujemy rozkładem empirycznym F_n . W przypadku próby definicję można zapisać równoważnie:

$$TD(y; X^n) = \frac{1}{n} \cdot \min_{\|u\|=1} \# \{i : u'x_i \leq u'y\}, \quad (9)$$

gdzie, u przebiega wszystkie wektory w \mathbb{R}^d z $\|u\| = 1$.

Głębia Tukey'a umożliwia porządkowanie punktów $x \in \mathbb{R}^d$ względem rozkładu prawdopodobieństwa F (rozkładu z próby F_n) na zasadzie odstawiania od centrum — punktu, w którym statystyczna funkcja głębi przyjmuje wartość maksymalną, określanego medianą Tukey'a.

Głębia Tukey'a w punkcie $x \in \mathbb{R}^d$ przyjmuje wartości z przedziału $[0, 1]$. Niewielkie wartości odpowiadają peryferiom rozkładu, wartości bliższe jedności odpowiadają centrum rozkładu. Zbiór punktów:

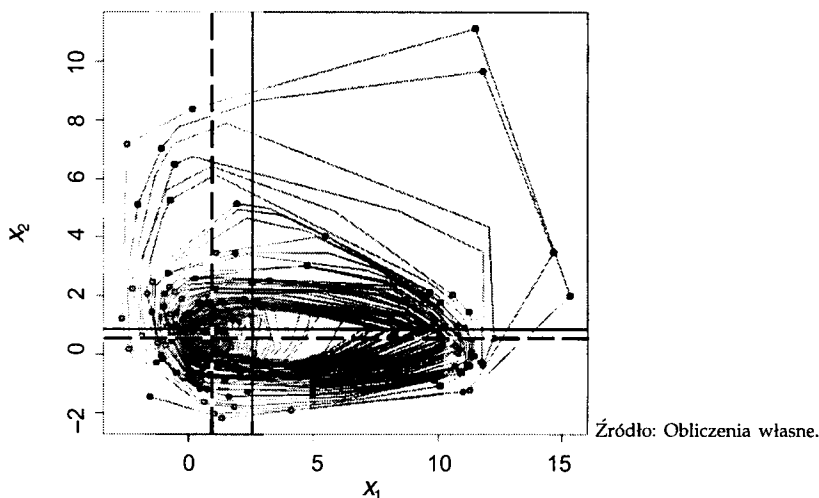
$$D_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : D(x, F) \geq \alpha\},$$

nazywamy α — obszarem centralnym, zbiór punktów:

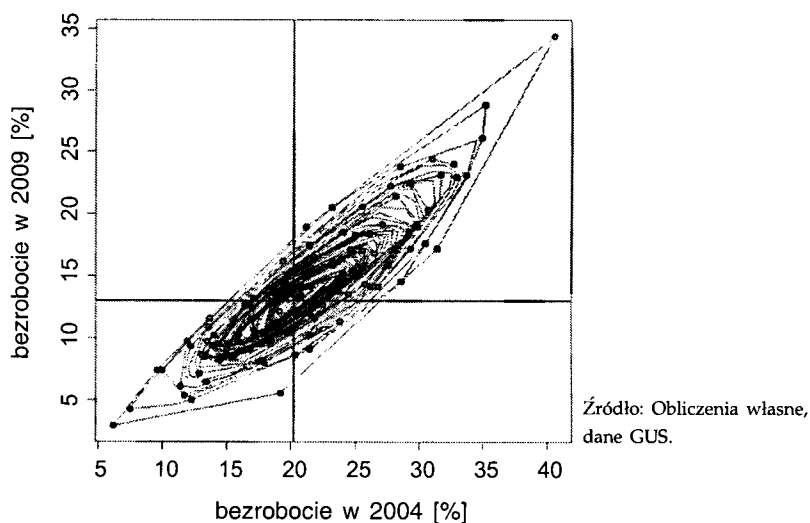
$$C_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : D(x, F) \geq \alpha\}$$

nazywamy konturem rzędu α . Obszary centralne tworzą zagnieżdżoną rodzinę wypukłych obszarów. Rozkład empiryczny dowolnego zbioru danych $X^n \in \mathbb{R}^d$ jest jednoznacznie wyznaczony przez jego empiryczną głębię Tukey'a, tzn. listę konturów z próby. Głębia ta jest afinicznie niezmiennicza. Niektóre ze statystycznych głębi Tukey'a zostały pokazane przez Donoho i Gasko (1992) oraz Masse i Theoredescu (1994). Mamy tu na uwadze między innymi zbieżność konturów z próby do konturów w populacji, słabą zbieżność głębi z próby w punkcie do odpowiednika w populacji, zbieżność prawie na pewno mediany Tukey'a z próby do jej odpowiedniczki w populacji. O ile głębia Tukey'a w punkcie nie jest zbyt odporna, to mediana Tukey'a ma BP > 20% oraz ograniczoną funkcję wpływu. To wystarcza dla wielu zastosowań praktycznych. Głębia Tukey'a nie wykorzystuje informacji metrycznych zawartych w próbie. To jej zaleta w kontekście zastosowań w badaniach zmiennych o wartościach na słabszych aniżeli ilorazowa skalach.

Na rycinie 1 przedstawiono wykres konturowy głębi Tukey'a dla próby 200 obserwacji, wygenerowanych z mieszaniny dwuwymiarowego rozkładu normalnego o udziale 80% i dwuwymiarowego rozkładu T-Studenta o trzech stopniach swobody i udziale 20%. Przecięcie linii przerywanej reprezentuje medianę Tukey'a z próby, przecięcie linii koloru czarnego reprezentuje wektor średnich. Na rycinie 2 przedstawiono wykres konturowy głębi Tukey'a dla próby powiatów województw łódzkiego, dolnośląskiego, mazowieckiego i małopolskiego, rozpatrywanych ze względu na stopę bezrobocia rejestrowanego w latach 2004 i 2009. Przecięcie linii reprezentuje medianę Tukey'a.



Ryc. 1. Kontury głębokości Tukey'a dla próby z mieszaniny rozkładu normalnego (80%) i rozkładu T-Studenta o trzech stopniach swobody (20%)



Rys. 2. Kontury głębokości Tukey'a dla próby powiatów rozpatrywanych co do stopy bezrobocia rejestr. w latach 2004 i 2009

Głębokość Tukey'a posiada centralną pozycję w koncepcji głębokości danych. Znanym jest wiele sposobów jej uogólnienia, których najbardziej znane jest podejście Zhanga, opierające się na metodologii *projection pursuit* (Zhang 2002) oraz podejście Mizery (Mizera 2002; Mizera i Muller 2004). Niniejsza praca ma na celu zaprezentowanie wybranych możliwości zastosowania podejścia Mizery i Mullera w odpornej analizie ekonomicznej.

3. GŁĘBIA POŁOŻENIA-ROZRZUTU MIZERY I MULLER

Przypuśćmy, że staramy się znaleźć dopasowanie (punkt wiernie oddający położenie, postać zależności itp.), element pewnego zbioru parametrów $\theta \in \Theta$ do obserwacji $Z^n = \{z_1, \dots, z_n\}$ generowanych przez rozkład wektora losowego Z . W celu wskazania optymalnego dopasowania przyjmuje się pewne kryterium optymalności, np. pewną funkcję obserwacji F . Oznaczmy wartość funkcji kryterium w punkcie z_i jako F_i . Można przyjąć, że im niższa wartość F_i tym lepiej θ odzwierciedla z_i . Na ogół nie istnieje dopasowanie jednostajnie najlepsze dla wszystkich obserwacji z_i , dlatego też decydujemy się na pewien kompromis, przykładowo na sumę F_i .

Głębia w ujęciu Mizery odzwierciedla pewien stopień dopuszczalności dopasowania, zważywszy na rozpatrywany zbiór danych. Jest rozwinięciem ogólnej definicji głębi przedstawionej w artykule Rousseeuw i Hubert (1999), a wywodzącej się od głębi Tukey'a. Głębia dopasowania θ oznacza najmniejszą liczbę obserwacji, których usunięcie z próby sprawia, że θ przestaje być dopasowaniem, to znaczy staje się wartością parametru, która zważywszy na rozpatrywany zbiór danych jest niedopuszczalna — wartość głębi równa się wówczas zero. Mizera proponuje mianowicie: niech $Z^n = \{z_1, \dots, z_n\}$ oznacza n -elementową próbę z Z , niech $N = \{1, \dots, n\}$ oznacza zbiór indeksów, niech $A \subseteq N$ oznacza pewien podzbiór zbioru indeksów. Załóżmy, że funkcja kryterium F działa ze zbioru parametrów Θ w zbiór $[0, \infty)$ oraz, że jest określona dla każdej obserwacji $z_i \in Z^n$, $F_{z_i}(\theta) \equiv F_i$.

Wartość parametru $\theta \in \Theta \subseteq \Theta$ nazwiemy słabo optymalną w $\tilde{\Theta}$ względem $A \subseteq N$ (względem obserwacji o indeksach z A), jeżeli $A \neq \emptyset$ i nie istnieje $\theta \in \Theta$ taki, że $F_i(\tilde{\theta}) < F_i(\theta)$ dla wszystkich $i \in A$.

Definiujemy globalną głębię dopasowania $\tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}$ jako:

$$DG(\theta, Z^n) = \min\{A \subseteq N : \theta \text{ nie jest słabo optymalny w } \Theta \text{ względem } A'\}, \quad (10)$$

gdzie A' oznacza dopełnienie zbioru A . (Ile wynosi minimalna liczba obserwacji, których usunięcie sprawia, że dopasowanie przestaje być optymalne względem obserwacji, które zostały.)

Typowe funkcje kryterium w wielowymiarowym zagadnieniu położenia mają postać: $F_i(z_i) = \|z_i - \theta\|$ bądź $F_i(z_i) = \|z_i - \theta\|^2$. W zagadnieniu regresji liniowej: gdzie $z_i = (x_i, y_i)$ powszechnie wykorzystuje się funkcje kryterium postaci: $F_i(\theta) = (y_i - x_i' \theta)^2$ albo $F_i(\theta) = |y_i - x_i' \theta|$.

Biorąc pochodne w zagadnieniu optymalizacyjnym funkcji kryterium Mizery definiuje głębię styczną dopasowania θ jako:

$$TD(\theta; Z^n) = \frac{1}{n} \inf_{u \neq 0} \#\{i : u' \nabla F_i(\theta) \geq 0\}, \quad (10)$$

gdzie $\nabla F_i(\theta)$ to gradient funkcji kryterium dla dopasowania θ w ustalonym punkcie z_i .

W wielowymiarowym zagadnieniu położenia gradient funkcji kryterium ma postać: $\nabla F_i(\theta) = \theta - z$, dlatego też:

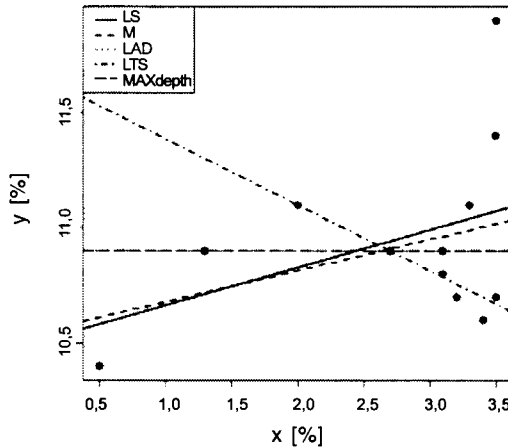
$$TD(\theta; Z'') = \min_{u \neq 0} \# \{i : u'(\theta - z_i) \geq 0\} = \min_{|u|=1} \# \{i : z_i \in H_{\theta, u}\}. \quad (11)$$

Powyższe sformułowanie jest równoważne z oryginalną definicją głębokości domkniętej półprzestrzeni Tukey'a (1975) oraz Donoho i Gasko (1992).

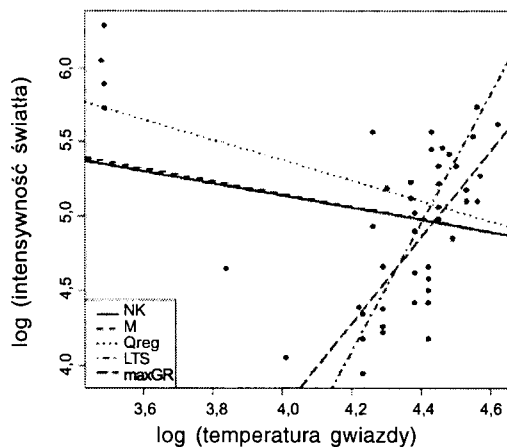
W przypadku regresji liniowej dla kryterium $F_i(\theta) = 1/2(y_i - x_i'\theta)^2$:

$$TD(\theta; Z'') = \min \# \{i : -u'x_i(y_i - x_i'\theta) \geq 0\} = \min \# \{i : \text{sgn}(u'x_i)\text{sgn}(y_i - \theta'x_i) \geq 0\}. \quad (12)$$

Łatwo zauważyć tu oryginalną definicję głębokości regresyjnej Rousseeuw i Hubert (1999).



Ryc. 3. Miesięczna stopa inflacji (x) vs. miesięczna stopa bezrobocia w Polsce w 2009 r. Dopasowania uzyskane za pomocą pięciu kryteriów



Ryc. 4. Liniowa funkcja regresji dopasowana do zbioru danych CYGOB1 za pomocą pięciu alternatywnych kryteriów

Na rycinach 3 i 4 pokazano przykłady zastosowania estymatora maksymalnej głębi regresyjnej w porównaniu z estymatorami NK, M-, LTS (najmniejszych przyciętych kwadratów) i LMS (najmniejszej mediany kwadratów). Estymator maksymalnej głębi regresyjnej Rousseeuw i Hubert odznacza się punktem załamania bliskim 30%, dobrą szybkością zbieżności oraz efektywnością. O modelu generującym dane zakładamy jedynie, że warunkowa mediana odpowiedzi jest liniowa względem zmiennych objaśniających. Głębia dopasowania (prostej) równa jest minimalnej liczbie obserwacji, które napotykamy obracając dopasowanie do pozycji pionowej.

Mizera rozszerza swoje rozważania na przypadek populacji. Wprowadza pole losowe na rozważanej w danym zagadnieniu borelowskiej σ algebrze zbiorów, pole reprezentuje możliwe populacje generujące dane. Oznaczając przez $\Phi_\theta^{-1}(E) = \{z : \Phi_\theta \in E\}$, przeciwobraz zbioru E przy funkcji Φ , przyjmując, jak poprzednio: $\Phi_\theta(Z) = \nabla F_z(\theta)$ oraz przyjmując, że $P_\theta = P \circ \Phi_\theta^{-1}$ definiujemy głębię styczną parametru θ przy rozkładzie prawdopodobieństwa P jako:

$$TD(\theta, P) = D(P_\theta) = D(P \circ \Phi_\theta^{-1}) = \inf_{u \neq 0} P(\Phi_\theta^{-1}(H_u)). \quad (13)$$

Mizera pokazuje zastosowanie powyższe definicji między innymi w przypadku parametru położenia i regresji liniowej, uzyskując dolne ograniczenie dla BP procedury indukowanej przez głębię.

Zdaniem autora warto zwrócić szczególną uwagę na rozwinięcie podejścia Mizery wiążące się zastosowaniem funkcji kryterium wywodzących się z zasady największej wiarygodności. Niech y_i oznaczają realizacje niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, o gęstości f , wyznaczone z dokładnością do parametru położenia μ i rozrzutu σ . W takiej sytuacji logarytm wiarygodności próby przyjmuje postać:

$$\sum_{i=1}^n \left(-\log f \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) + \log \sigma \right). \quad (14)$$

Mizera i Muller proponują, aby jako funkcję kryterium przyjąć:

$$F_i(\mu, \sigma) = -\log f \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) + \log \sigma, \quad (15)$$

oraz jako definicję głębi — formułę głębi stycznej zaproponowaną przez Mizere (2002):

$$D(\theta, Y^n) = \inf_{u \neq 0} \# \{i : -u' \nabla F_i(\theta) \geq 0\}.$$

Uzyskaną w ten sposób rodzinę funkcji głębi, zależną od przyjętej funkcji gęstości, nazywają głębiami położenia-rozrzutu.

DEFINICJA 1. Głębia położenia i rozrzutu Mizery i Muller punktu $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ względem próby $Y^n = \{y_1, \dots, y_n\}$ określona jest wyrażeniem:

$$D((\mu, \sigma, \mathbb{Y}^n) = \inf_{u \neq 0} \# \left\{ i : (u_1, u_2) \left(\frac{\psi(\tau_i)}{\chi(\tau_i) - 1} \right) \geq 0 \right\}, \quad \sigma > 0$$

$$= \# \{ i : y_i = \mu \}, \quad \text{dla } \sigma = 0, \quad (16)$$

gdzie τ_i jest skrótem dla $(y_i - \mu)/\sigma$ oraz ψ, χ zależą od gęstości f $\psi(\tau) = (-\log f(\tau))' = -f'(\tau)/f(\tau)$ oraz $\chi(\tau) = \tau \psi(\tau)$.

Ustalając jeden z parametrów, otrzymujemy definicję głębokości położenia bądź głębokości rozrzutu. Definicja 1 daje wiele możliwości — umożliwia wprowadzenie całej rodziny głębokości zależnych od gęstości, np. gęstości f rozkładu Studenta z stopniami swobody:

$$D((\mu, \sigma, \mathbb{Y}^n) = \inf_{u \neq 0} \# \left\{ i : (u_1, u_2) \left(\frac{n}{n+1} (\tau_i^2 - 1) \right) \geq 0 \right\}. \quad (17)$$

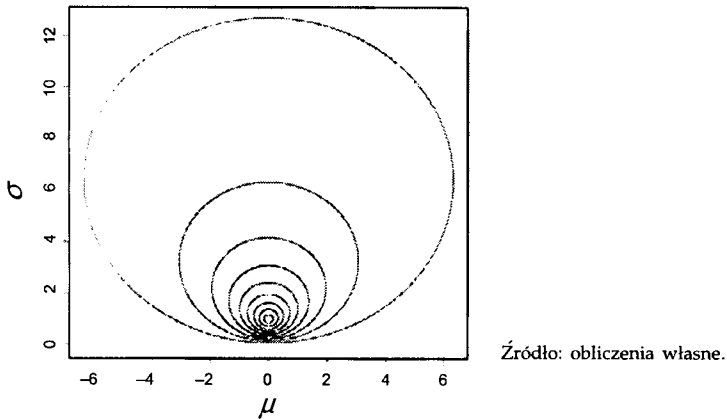
DEFINICJA 2. Głębokość Studenta położenia i rozrzutu punktu $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ względem rozkładu prawdopodobieństwa R na \mathbb{R} określona jest wyrażeniem:

$$D((\mu, \sigma), P) = \inf_{(u_1, u_2) \neq 0} P \{ y : u_1(y - \mu) + u_2((y - \mu)^2 - \sigma^2) \geq 0 \}. \quad (18)$$

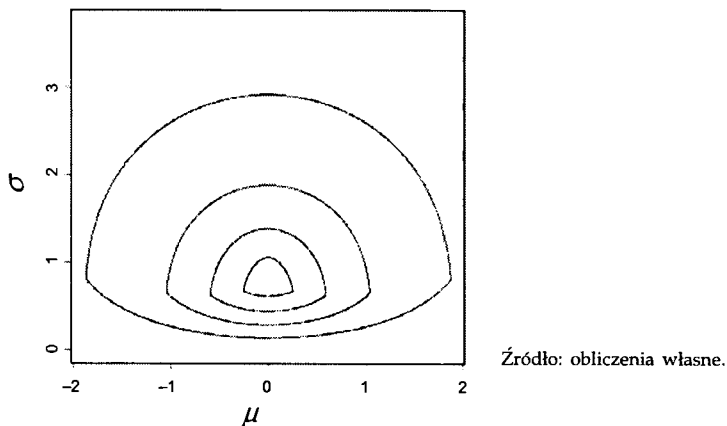
Empiryczną głębokość Studenta otrzymamy zastępując rozkład P jego empirycznym odpowiednikiem P_n . Głębokość Studenta jest dwuwymiarową głębokością Tukey'a na płaszczyźnie Poincaré'a, będącej modelem hiperbolicznej geometrii Łobaczewskiego. Dla dowolnego rozkładu prawdopodobieństwa o ciągłej dystrybucji i o spójnym nośniku $D((\mu, \sigma), P) < 1/2$, istnieje punkt o maksymalnej głębokości i jest on wyznaczony jednoznacznie — istnieje punkt $(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma})$ taki, że $D((\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}), P) \geq 1/3$. Można zdefiniować symplecjonalną głębokość położenia-rozrzutu, która jest niezależna od własności metrycznych próby. Głębokość położenia-rozrzutu jest ekwiwariantna względem położenia i rozrzutu: jeżeli punkty próby przekształcimy za pomocą $g(y) = ay + b$, wówczas głębokość przekształconego parametru $(a\mu + b, a\sigma)$ jest taka sama jak (μ, σ) . Głębokość Studenta jest niezmiennicza względem grupy Möbiusa. Dla symetrycznych rozkładów μ mediany Studenta leży blisko mediany z próby, dla rozkładów asymetrycznych jednomodalnych μ mediany Studenta — leży bliżej modalnej niż mediana, σ mediany Studenta jest na ogół mniejsze niż MAD. Głębokość Studenta dla dowolnego rozkładu P zbiega jednostajnie względem (μ, σ) prawie na pewno $D((\mu, \sigma), P_n) \rightarrow D((\mu, \sigma), P)$. Można pokazać zbieżność konturów z próby do konturów w populacji oraz zbieżność prawie na pewno estymatora maksymalnej głębokości — mediany Studenta. Postać rozkładu asymptotycznego mediany Studenta nie jest znana. Szybkość zbieżności rzędu \sqrt{n} wynika z ogólnej teorii, wydaje się, że jest lepsza. Punkt załamania BP mediany Studenta wynosi 33%. Pozostaje otwarty problem: czy głębokość Studenta charakteryzuje rozkład jednoznacznie? Głębokość Studenta dobrze wychwytuje asymetrię oraz tłuste ogony populacji. Mediana Stu-

denta jest zgodnym estymatorem centrum symetrii populacji. W kontekście zastosowań głębi położenia-rozrzutu wskaźmy przykładowo, że ocena własnej sytuacji w grupie przez jednostkę zależy od jej odległości do centrum (położenie), panującego w grupie zróżnicowania pozycji (rozrzut) oraz przeświadczenia o mechanizmie losowym, generującym poszczególne pozycje (gęstość).

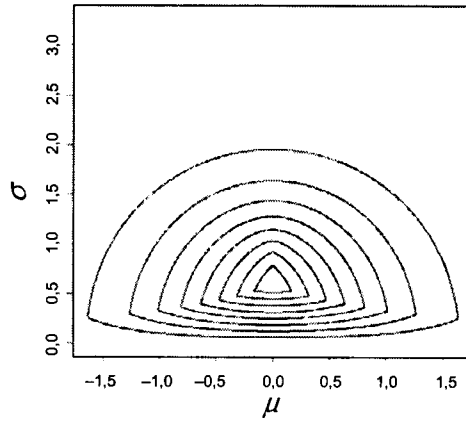
Ryciny 5–14 przedstawiają wykresy konturowe głębi Studenta dla wybranych a często wykorzystywanych w ekonomii, rozkładów oraz dla mieszanin rozkładów. Z rysunków jasno wynika, że głębia Studenta jest wrażliwa na typ rozkładu. Wykres konturowy może zostać wykorzystany jako alternatywa dla wykresu kwantyl–kwantyl. Jego zaletą jest to, że nie musimy skalować danych co jest konieczne w przypadku wykresu kwanty–kwantyl. Z rycin wynika, że wykres konturowy bardzo dobrze wychwytuje asymetrię rozkładu oraz zmieszanie rozkładu z rozkładem reprezentującym zaburzenie.



Ryc. 5. Kontury głębi Studenta dla rozkładu Cauchy'ego

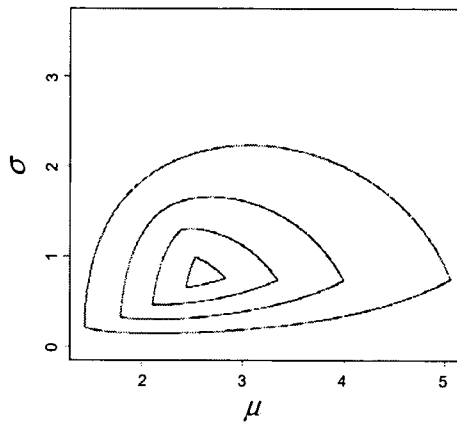


Ryc. 6. Kontury głębi Studenta dla rozkładu Studenta t o dwóch stopniach swobody



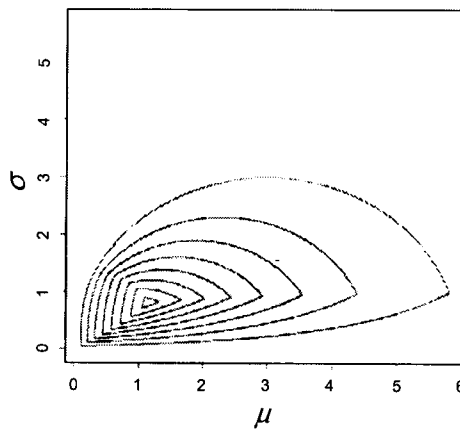
Źródło: obliczenia własne.

Ryc. 7. Kontury głębi Studenta dla rozkładu $N(0,1)$



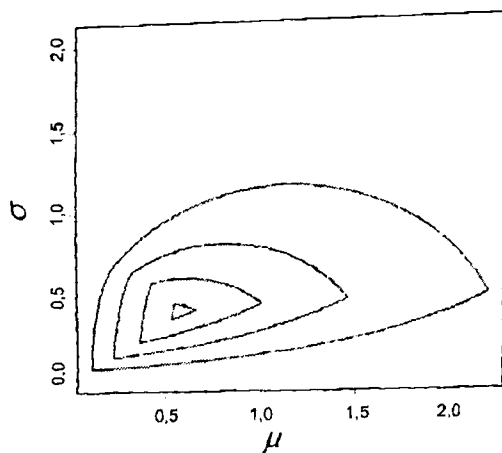
Źródło: obliczenia własne.

Ryc. 8. Kontury głębi Studenta dla rozkładu lognormalnego o parametrach 1 i 0,5



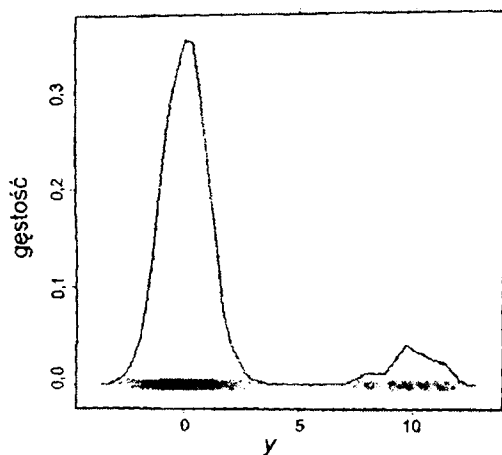
Źródło: obliczenia własne.

Ryc. 9. Kontury głębi Studenta dla rozkładu χ^2 o dwóch stopniach swobody

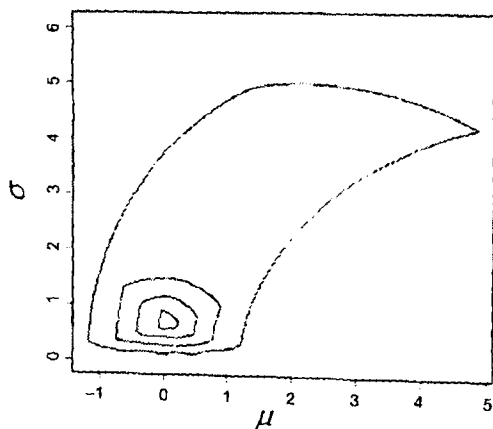


Źródło: obliczenia własne.

Ryc. 10. Kontury głębi Studenta dla rozkładu wykładniczego o wartości parametru równej 1

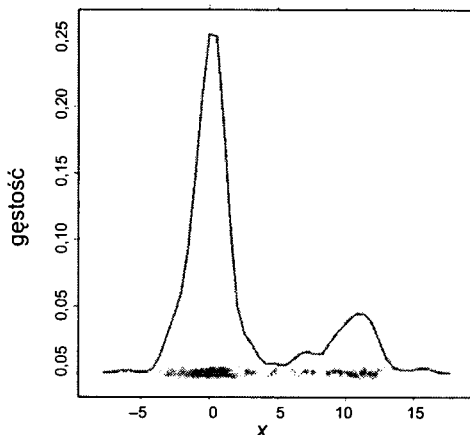


Źródło: obliczenia własne.

Ryc. 11. Oszacowanie gęstości mieszaniny rozkładu $N(0,1)$ (udział 90%) i rozkładu $N(10,1)$ (udział 10%)

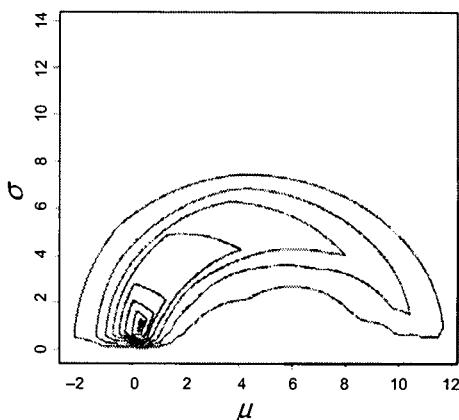
Źródło: obliczenia własne.

Ryc. 12. Kontury głębi Studenta dla mieszaniny rozkładu $N(0,1)$ (udział 90%) i rozkładu $N(10,1)$ (udział 10%)



Źródło: obliczenia własne.

Ryc. 13. Oszacowanie gęstości mieszaniny rozkładu $t(3)$ (udział 80%) i rozkładu $N(10,2)$ (udział 20%)



Źródło: obliczenia własne.

Ryc. 14. Kontury głębi Studenta dla mieszaniny rozkładu $t(3)$ (udział 80%) i rozkładu $N(10,2)$ (udział 20%)

Procedury statystyczne indukowane przez statystyczne funkcje głębi często traktowane są jako niezależne, które nie mają związku z procedurami statystycznymi, rozwijanymi w ramach głównego nurtu statystyki odpornej. Podejścia Mizery i Mizery i Mullera pokazują, że istnieje ścisły związek pomiędzy koncepcją głębi danych a dorobkiem klasycznej statystyki matematycznej. Dla przykładu poniżej wskażemy na związki estymatorów maksymalnej głębi z szeroko rozpowszechnioną klasą M-estymatorów (por. Maronna i in. 2006). M-estymatory wywodzące się z metody największej wiarygodności występują jako estymatory odporne w większości komercyjnych pakietów statystycznych.

Rozważmy jednowymiarowy zbiór danych $\mathbf{X}^n = \{x_1, \dots, x_n\}$ o rozkładzie empirycznym F_{nX} . Niech $\mu(\cdot)$ oraz $s(\cdot)$ oznaczają jednowymiarowe, ekwiwariantne

funkcjonały położenia i rozrzutu na rodzinie jednowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa. Wówczas M-estymator położenia i rozrzutu definiujemy odpowiednio jako rozwiązanie (β, σ) równań:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi \left(\frac{x_i - \beta}{s(F_{nZ})} \right) = 0, \quad (19)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi \left(\frac{z_i - \mu(F_{nZ})}{\sigma} \right) = 0, \quad (20)$$

gdzie ψ oraz χ oznaczają stosownie dobrane funkcje, odpowiednio nieparzystą i parzystą.

Zauważmy, że wielkość:

$$O_{\psi n} = \left| \sum_{i=1}^n \underbrace{\psi \left(\frac{x_i - b}{s(F_{nZ})} \right)}_{F_i} \right| / n, \quad (21)$$

można potraktować jako miarę odstawiania β względem zbioru danych \mathbb{X}^n , F_i , natomiast jako uogólnienie funkcji kryterium Mizery i Mullera.

Aby zdefiniować głębnię położenia można posłużyć się podejściem Mizery i określić ją jako:

$$D(\beta, \mathbb{X}^n) = \frac{1}{1 + O_{\psi n}(\beta, \mathbb{X}^n)}. \quad (22)$$

Podobnie wielkość:

$$O_{\mu \chi n}(\sigma, \mathbb{X}^n) = \left| \sum_{i=1}^n \underbrace{\chi \left(\frac{z_i - \mu(F_{nZ})}{\sigma} \right)}_{G_i} \right| / n, \quad (23)$$

możemy potraktować jako miarę odstawiania charakterystyki rozrzutu σ względem $\{|x_1 - \mu(F_{nZ})|, \dots, |x_1 - \mu(F_{nZ})|\}$, G_i natomiast jako funkcję kryterium.

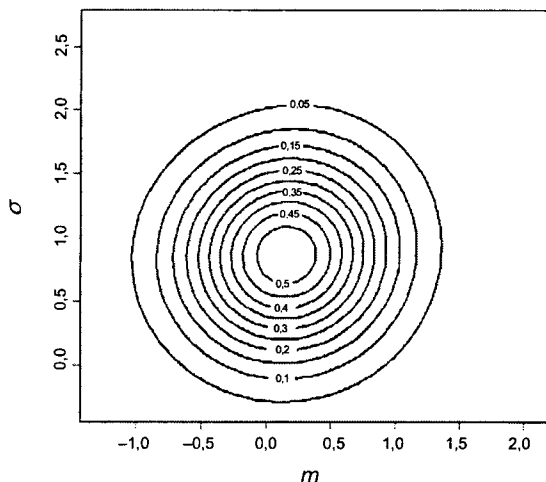
Odpowiednią funkcję głębni charakterystyki rozrzutu definiujemy jako:

$$D(\sigma, \mathbb{X}^n, \mu) = \frac{1}{1 + O_{\mu \chi n}(\sigma, \mathbb{X}^n)}. \quad (24)$$

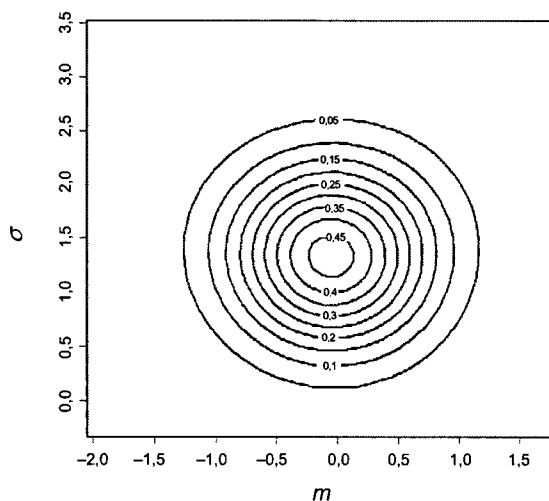
Zauważmy zatem, że M-estymatory położenia i rozrzutu są po prostu estymatorami maksymalnej głębni zdefiniowanych powyżej funkcji głębni 22 i 24 bądź estymatorami maksymalnej głębni stycznej Mizery.

4. ZASTOSOWANIA GŁĘBI STUDENTA

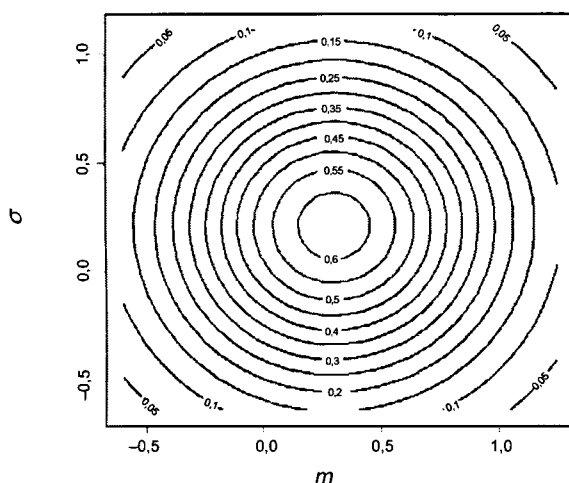
Łączne szacowanie charakterystyk położenia i rozrzutu zmiennej losowej pojawia się w wielu szczególnie istotnych z punktu widzenia zastosowań praktycznych zagadnieniach statystyki matematycznej. Dla przykładu wskażmy na popularny test t -Studenta, potrzebę łącznego szacowania oczekiwanej stopy zwrotu i ryzyka portfela, szacowania składników mieszaniny generujących obserwacje w analizie skupisk. Głębia Studenta odznacza się dobrymi własnościami w próbach o wielkości 30–50 obserwacji. Ryciny 15–18 przedstawiają



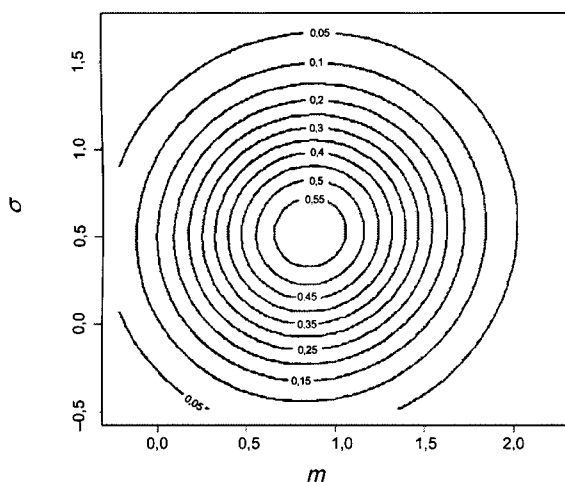
Ryc. 15. Oszacowanie gęstości mediany Studenta z próby $N(0,1) \times 80\% + N(5,2) \times 20\%$



Ryc. 16. Oszacowanie gęstości mediany Studenta z próby $t(3,-5) \times 15\% + t(3) \times 70\% + t(3,5) \times 15\%$



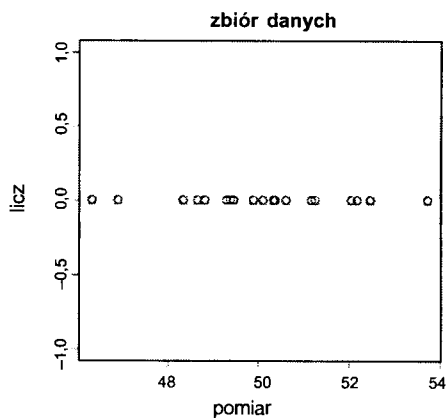
Ryc. 17. Oszacowanie gęstości mediany Studenta z próby rozkładu wykładniczego $\lambda = 2$



Ryc. 18. Oszacowanie gęstości mediany Studenta z próby rozkładu log normalnego (0,1)

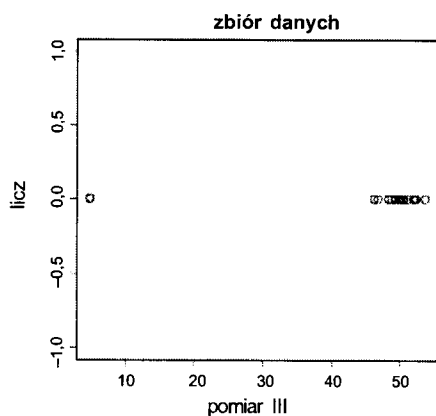
oszacowanie jądrowe gęstości mediany Studenta wykonane na podstawie 50 elementowych prób z rozkładów odpowiednio: mieszaniny $N(0,1) \times 80\% + N(5,2) \times 20\%$, mieszaniny $t(3, -5) \times 15\% + t(3) \times 70\% + t(3, 5) \times 15\%$, rozkładu wykładniczego $\lambda = 2$ i log normalnego o parametrach 0 i 1. Oszacowania wskazują, że mediana Studenta dobrze wskazuje centrum i rozrzut głównych składników mieszanin, w przypadkach rozkładów o asymetrycznych gęstościach położenie mediany Studenta jest bliższe modalnej, rozrzut mediany Studenta przyjmuje mniejszą wartość niż MAD.

Ryciny 19–21 przedstawiają trzy zbiory danych zaczerpnięte z książki Jurackowa i Picek (2006). Na rycinie 19 nie występują obserwacje odstające, na



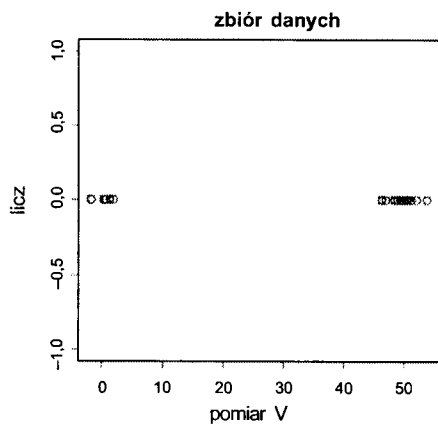
Źródło: Jureckowa i Picek (2006).

Ryc. 19. Przykładowy zbiór danych bez jednostek odstających



Źródło: Jureckowa i Picek (2006).

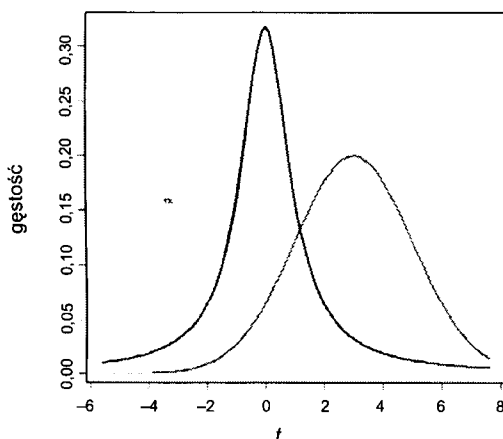
Ryc. 20. Przykładowy zbiór danych z jednostką odstającą



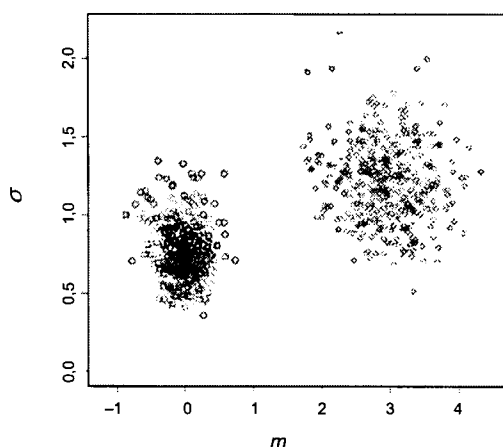
Źródło: Jureckowa i Picek (2006).

Ryc. 21. Przykładowy zbiór danych ze skupiskiem odstających

rycinie 20 dostrzegamy pojedynczą obserwację odstającą, na rycinie 21 łatwo zauważyć skupisko obserwacji odstających. Wykorzystując odpowiednie zbiory danych w celu skonstruowania 95% przedziałów ufności dla wartości oczekiwanych otrzymamy odpowiednio (49,19; 50,89), (43,045; 52,664), (27,195; 47,763) w przypadku zastosowania znanej formuły $x \pm t_{\alpha/2}^S / \sqrt{n-1}$, oraz otrzymamy przedziały (49,36; 50,28), (49,401; 50,494), (48,629; 50,188), stosując za każdym razem medianę Studenta, tzn. współrzędną położenia zamiast średniej, a współrzędną rozrzutu zamiast odchylenia standardowego. Porównanie przedziałów wskazuje na przewagę zastosowania mediany Studenta w przypadku występowania pośród danych jednostek odstających. Na rycinie 22 przedstawiono gęstości rozkładu t -Studenta o dwóch stopniach swobody i rozkładu $N(3,2)$. Na rycinie 23 pokazano mediany Studenta z prób 30-elementowych



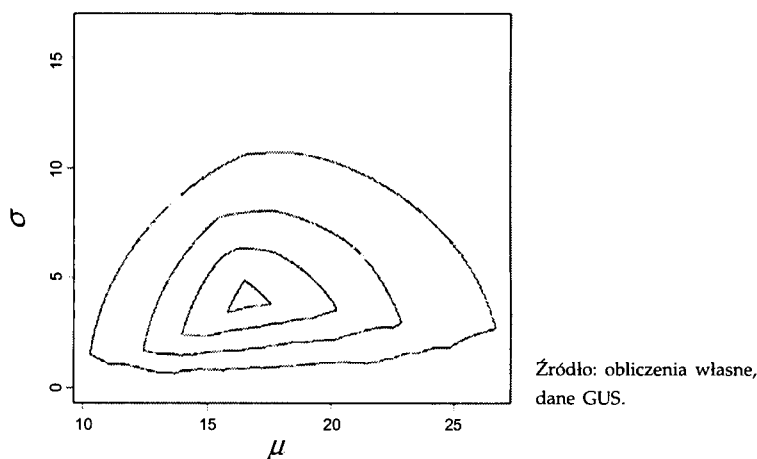
Ryc. 22. Gęstość rozkładu $t(2)$ i $N(3,2)$



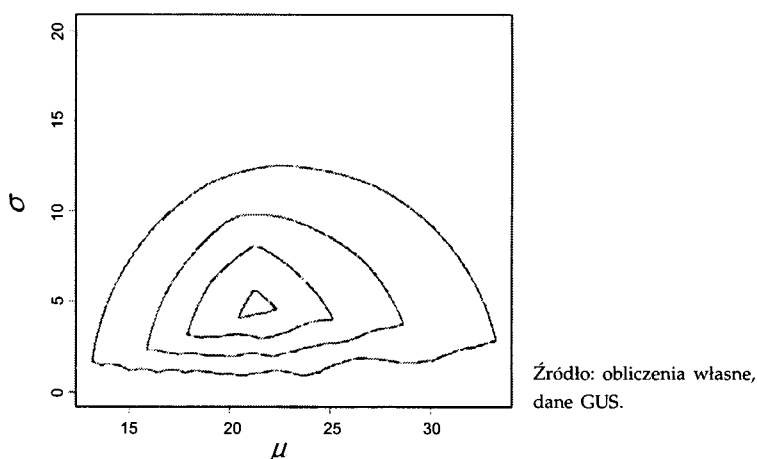
Ryc. 23. Mediana Studenta z próby z $t(2)$ — lewa strona i z $N(3,2)$ prawa strona wykresu

z tych rozkładów. Rycina 23 sugeruje spory potencjał mediany Studenta w kontekście proponowania testów istotności równości dwóch rozkładów.

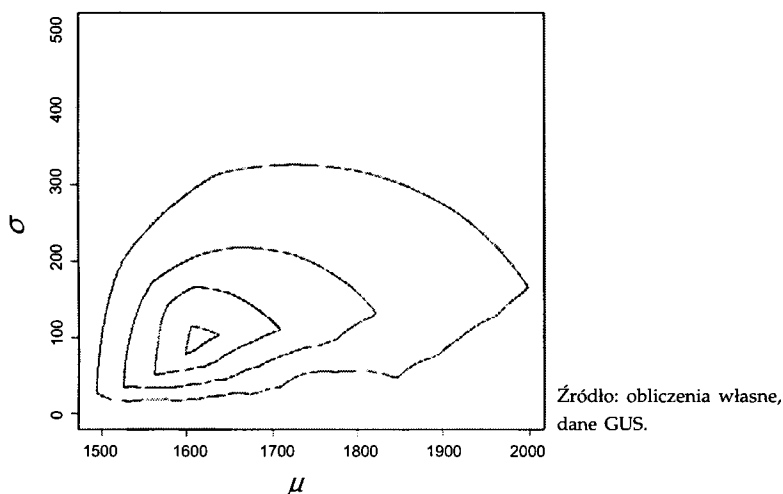
Na rycinach 24–27 przedstawiono wykresy konturowe głębi Studenta dla stopy bezrobocia i przeciętnego wynagrodzenia brutto w powiatach Polski w latach 2000 i 2005. W przypadku stopy bezrobocia w roku 2000 mamy oszacowanie położenia i rozrzutu za pomocą mediany Studenta jako StudentMed = (16,6; 3,97), wobec oszacowania za pomocą średniej arytmetycznej i odchylenia standardowego $\bar{x} = 17,75$, $sd = 6,55$. Sytuacja w roku 2005 przedstawia się jako StudentMed = (21,46; 4,89), wobec $\bar{x} = 22,42$, $sd = 7,72$. W przypadku przeciętnego wynagrodzenia brutto w roku 2000 mamy StudentMed = (1613,5; 99,7), wobec $\bar{x} = 1706,16$, $sd = 251,2$.



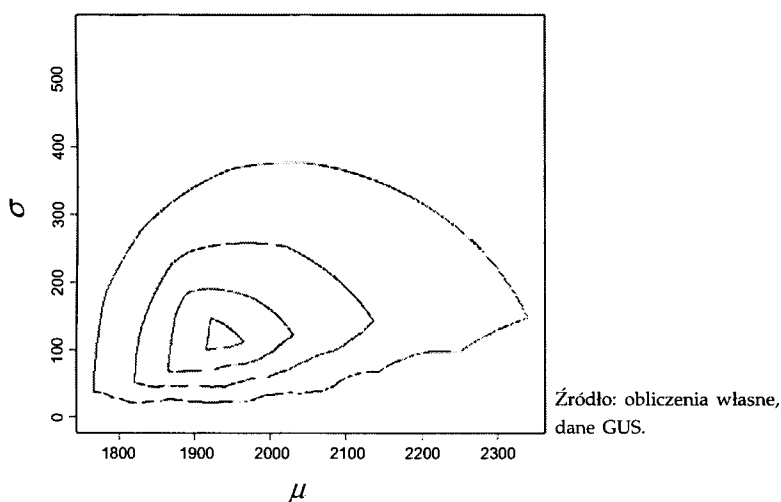
Ryc. 24. Kontury głębi Studenta — stopa bezrobocia w polskich powiatach w roku 2000



Ryc. 25. Kontury głębi Studenta — stopa bezrobocia w polskich powiatach w roku 2005



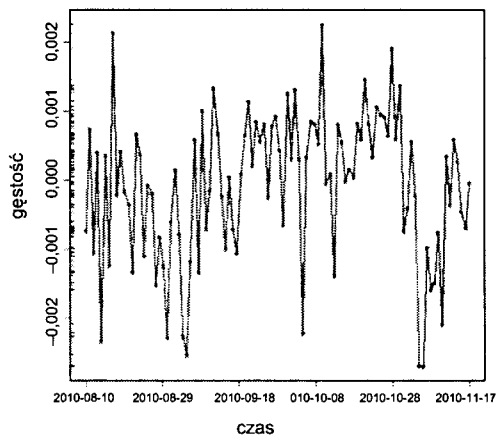
Ryc. 26. Kontury głębi Studenta — przeciętne wynagrodzenie w polskich powiatach w roku 2000



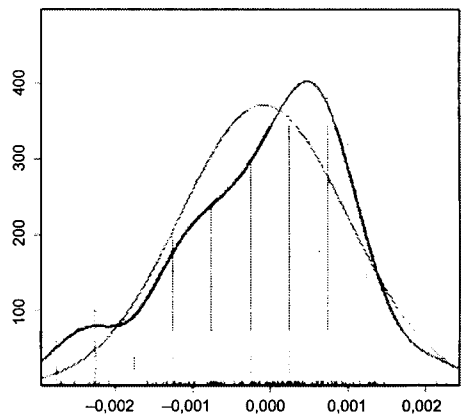
Ryc. 27. Kontury głębi Studenta — przeciętne wynagrodzenie w polskich powiatach w roku 2005

Dla tej samej cechy w roku 2005 StudentMed = (1931,43; 112,85), wobec $\bar{x} = 2026,36$, $sd = 301$. Łatwo zauważyć niższe wartości wskazań położenia i rozrzutu za pomocą mediany Studenta w porównaniu ze średnią i odchyleniem standardowym.

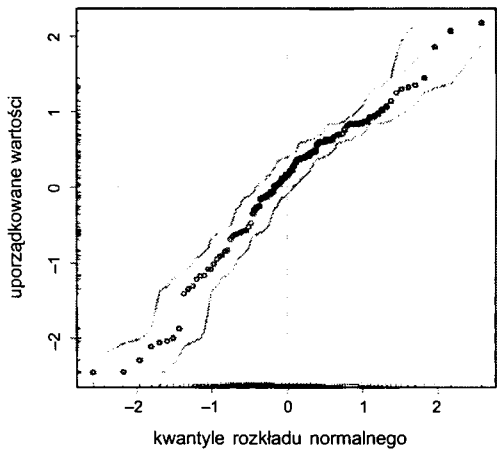
Ryciny 28–31 przedstawiają odpowiednio sto obserwacji wygenerowanych z modelu AR(1) o parametrze $\phi_1 = 0,5$, wykres oszacowanej funkcji gęstości dla tych obserwacji, wykres kwantyl–kwantyl i konturowy wykres głębi Studenta. Konturowy wykres głębi Studenta sugeruje skośność rozkładu, jednakże podobnie jak wykresy kwanty–kwantyl i wykres gęstości wskazanie na auto-



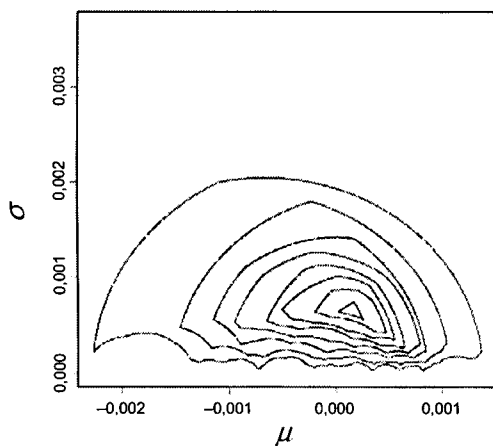
Ryc. 28. Sto obserwacji wygenerowanych z modelu AR(1): $\phi_1 = 0,5$



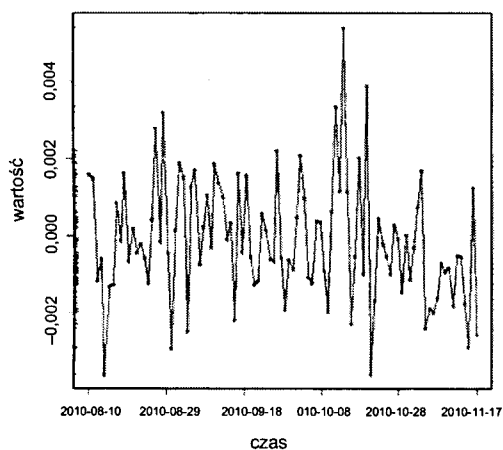
Ryc. 29. Oszacowanie gęstości dla 100 obserwacji z modelu AR(1): $\phi_1 = 0,5$



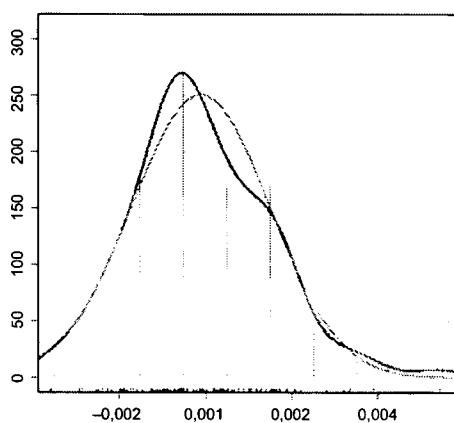
Ryc. 30. Wykres kwanty–kwanty dla obserwacji wygenerowanych z modelu AR(1): $\phi_1 = 0,5$



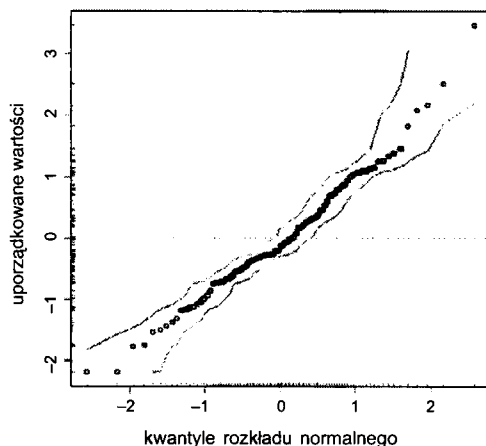
Ryc. 31. Wykres konturowy głębi Studenta dla obserwacji wygenerowanych z modelu AR(1): $\phi_1 = 0,5$



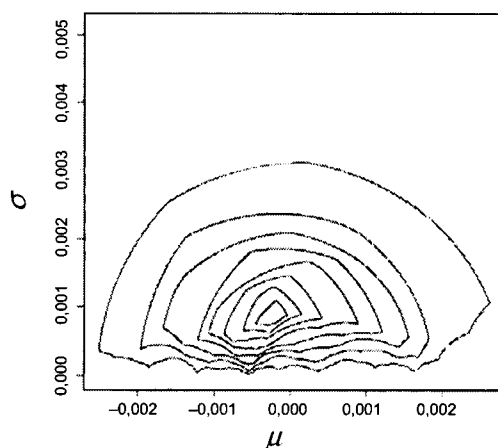
Ryc. 32. Sto obserwacji wygenerowanych z modelu GARCH(2,1) : $\alpha_1 = 0,2$, $\alpha_2 = 0,4$, $\beta_1 = -0,6$



Ryc. 33. Oszacowanie gęstości dla 100 obserwacji z modelu GARCH(2,1)



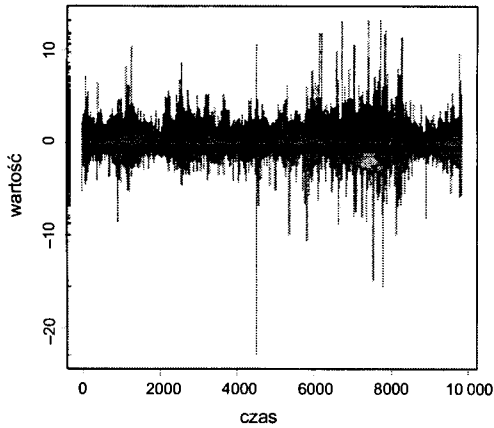
Ryc. 34. Wykres kwanty-kwanty dla obserwacji wygenerowanych z modelu GARCH(2,1)



Ryc. 35. Wykres konturowy głębokości Studenta dla obserwacji wygenerowanych z modelu GARCH(2,1) : $\alpha_1 = 0,2$, $\alpha_2 = 0,4$, $\beta_1 = -0,6$

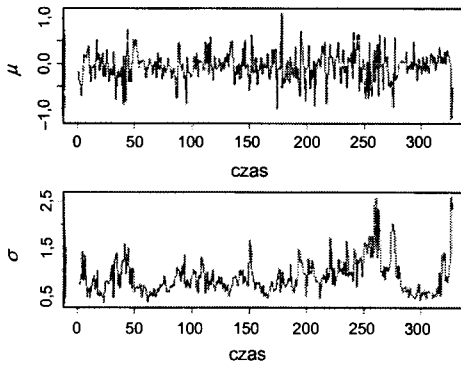
korelację nie jest wyraźne. Nieco lepiej przedstawia się sytuacja w przypadku modelu GARCH(2,1). Ryciny 32–35 przedstawiają analogiczne wykresy co ryciny 28–31 w przypadku modelu AR(1). Jednakże i w tym przypadku manifestacja efektu GARCH (ogólniej braku niezależności obserwacji, np. reszt regresji) w postaci wykresu konturowego głębokości Studenta nie jest jednoznaczna. W kontekście dalszych studiów zagadnienia wydaje się zasadnym rozważenie wykresu ruchomej mediany Studenta w charakterze narzędzia wskazującego na występowanie efektu GARCH.

Rycina 36 przedstawia wykres dziennych prostych stóp zwrotu z akcji spółki IBM 01.02.1970–31.12.2008 roku, dane zaczerpnięto ze strony internetowej klasycznego podręcznika analizy finansowych szeregów czasowych Tsay (2010).



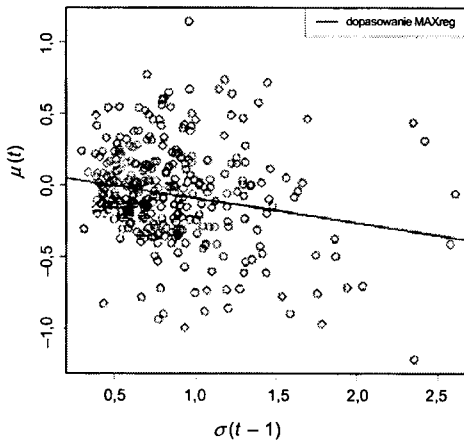
Źródło: obliczenia własne,
dane Tsay (2010).

Ryc. 36. Dziennie proste stopy zwrotu z akcji spółki IBM 01.02.1970–31.12.2008 roku



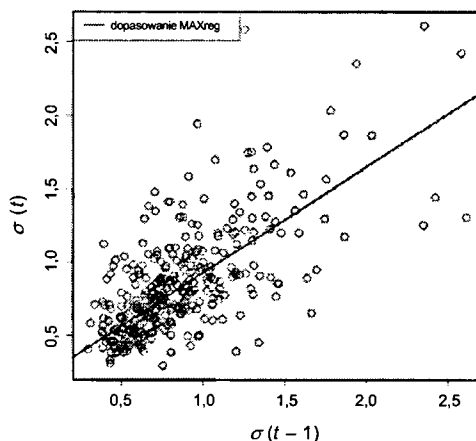
Źródło: obliczenia własne,
dane Tsay (2010).

Ryc. 37. Miesięczne współrzędne położenia i rozrzutu mediany Studenta dla dziennych prostych stóp zwrotu z akcji spółki IBM 01.02.1970–31.12.2008 roku



Źródło: obliczenia własne,
dane Tsay (2010).

Ryc. 38. Diagram rozrzutu miesięczne współrzędne położenia w chwili t i rozrzutu w chwili $t - 1$ mediany Studenta dla dziennych prostych stóp zwrotu z akcji spółki IBM

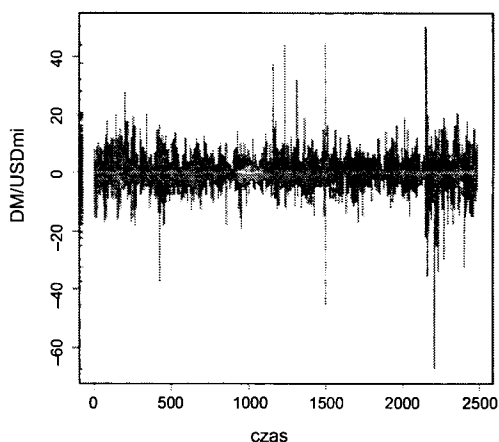


Źródło: obliczenia własne,
dane Tsay (2010).

Ryc. 39. Diagram rozrzutu miesięczne współrzędne rozrzutu w chwili t i rozrzutu w chwili $t - 1$ mediany Studenta dla dziennych prostych stóp zwrotu z akcji spółki IBM

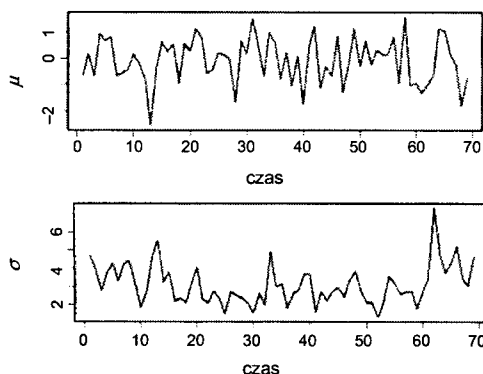
Opierając się na tym szeregu policzono miesięczne mediany Studenta, które przedstawiono na rycinie 37. Na rycinie 38 przedstawiono diagram rozrzutu współrzędna położenia mediany Studenta 30-dniowej w okresie t względem współrzędnej rozrzutu w okresie $t - 1$ wraz z naniesionym dopasowaniem maksymalnej głębi regresyjnej. Z ryciny wynika istnienie odwrotnego związku pomiędzy średnią stopą zwrotu a zmiennością stopy zwrotu. Z ryciny 39 wynika natomiast istnienie dodatniego związku pomiędzy zmiennością stopy zwrotu w chwili t a zmiennością w chwili $t - 1$. Wniosek opieramy na postaci dopasowania współrzędnych rozrzutu median Studenta w chwili t i $t - 1$.

Rycina 40 przedstawia wykres 10-minutowych logarytmów stóp zwrotu, związanych z kursem DM/USD w czerwcu 1989, dane zaczerpnięto ze strony



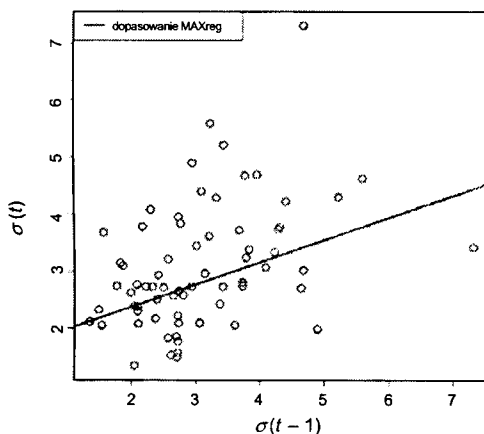
Źródło: obliczenia własne,
dane Tsay (2010).

Ryc. 40. Logarytmy 10-minutowych stóp zwrotu związane z kursem DM/USD



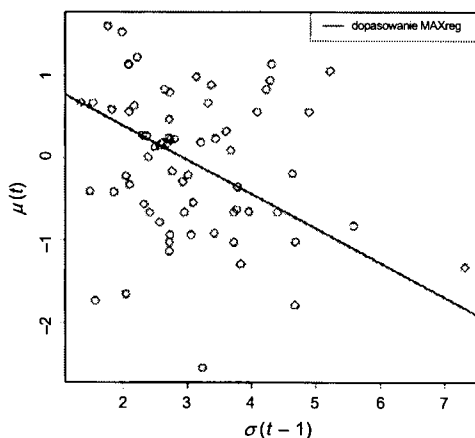
Źródło: obliczenia własne,
dane Tsay (2010).

Ryc. 41. 6-godzinne współrzędne położenia i rozrzutu mediana Studenta dla logarytmów stóp zwrotu, związanych z kursem DM/USD



Źródło: obliczenia własne,
dane Tsay (2010).

Ryc. 42. Diagram rozrzutu 6-godzinne współrzędne rozrzutu w chwili t i rozrzutu w chwili $t - 1$ mediana Studenta dla logarytmów stóp zwrotu DM/USD



Źródło: obliczenia własne,
dane Tsay (2010).

Ryc. 43. Diagram rozrzutu 6-godzinne współrzędne położenia w chwili t i rozrzutu w chwili $t - 1$ mediana Studenta dla logarytmów stóp zwrotu DM/USD

internetowej klasycznego podręcznika analizy finansowych szeregów czasowych Tsay (2010). Opierając się na tym szeregu policzono miesięczne mediany Studenta, które przedstawiono na rycinie 41. Na rycinie 42 przedstawiono diagram rozrzutu współrzędna położenia mediany Studenta 6-godzinnej w okresie t względem współrzędnej rozrzutu w okresie $t - 1$ wraz z naniesionym dopasowaniem maksymalnej głębi regresyjnej. Z ryciny wynika istnienie odwrotnego związku pomiędzy średnią stopą zwrotu a zmiennością stopy zwrotu. Z ryciny 43 wynika natomiast istnienie dodatniego związku pomiędzy zmiennością stopy zwrotu w chwili t a zmiennością w chwili $t - 1$. Wniosek opieramy na postaci dopasowania współrzędnych rozrzutu median Studenta w chwili t i $t - 1$.

5. PODSUMOWANIE

Procedury statystyczne indukowane przez statystyczne funkcje głębi cechuje odporność przy jednocześnie zadowalającej efektywności. Jednolite spojrzenie Mizery i Mizery i Mullera na funkcje głębi, wywodzące się od głębi domkniętej półprzestrzeni, z jednej strony pozwala dostrzec związki koncepcji z dorobkiem klasycznej statystyki matematycznej, z drugiej strony — zaproponować klasę parametrycznych funkcji głębi wywodzących się z zasady największej wiarygodności. Przykładem tej klasy parametrycznych funkcji głębi jest głębia Studenta. Głębia Studenta jest wrażliwa na typ rozkładu generującego obserwację, co daje nadzieję na jej wykorzystanie w weryfikacji hipotez dotyczących rozkładu. Estymator maksymalnej głębi Studenta — mediana Studenta odznacza się bardzo dobrymi statystycznymi własnościami. Mamy tutaj na uwadze szybkość zbieżności z próby, wysoki punkt załamania próby skończonej, zadowalającą efektywność. Mediana Studenta może zostać z powodzeniem wykorzystana w procesie weryfikacji hipotez dotyczących równości rozkładów, w analizie skupisk, wstępnej analizie szeregów czasowych. Warto podkreślić, że estymator ten odznacza się dobrymi własnościami w próbie o wielkości trzydziestu obserwacji. Fakt ten pozwala mieć nadzieję na szereg interesujących zastosowań głębi Studenta w odpornej analizie statystycznej.

BIBLIOGRAFIA

- Davies P.L. 2002. *Statistical Procedures and Robust Statistics*. <http://wwwstat.mathematik.uni-essen.de/~davies/statproc.ps.gz>.
- Davies P.L., Gather U. 2005. *Breakdown and Groups (with discussion and rejoinder)*. The Annals of Statistics, 33, 977–1035.
- Donoho D.L., Gasko M. 1992. *Breakdown Properties of Location Estimates Based on Halfspace Depth and Projected Outlyingness*. Annals of Statistics 20, 1803–1827.

- Donoho D.L., Huber P.J. 1983. *The Notion of Breakdown Point*, [w:] *A Festschrift for Erich Lehmann*, red. P.J. Bickel, K.A. Doksum, J.L. Hodges, Wadsworth, Belmont, CA, 157–184.
- Genton M.G., Lucas A. 2003. *Comprehensive Definitions of Breakdown Points for Independent and Dependent Observations*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B 65(1), 81–84.
- Hampel F.R., Ronchetti E.M., Rousseeuw P.J., Stahel W.A. 1986. *Robust Statistics: The approach based on influence functions*, New York.
- Huber P., Ronchetti E.M. 2009. *Robust Statistics*, New York.
- Jureckova J., Picek J. 2006. *Robust Statistical Methods with R*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC.
- Kosiorowski D. 2007. *O odpornej analizie regresji w ekonomii na przykładzie koncepcji głębi regresyjnej*, Przegląd Statystyczny 1, 109–121.
- Kosiorowski D. 2009. *Wybrane zagadnienia koncepcji głębi danych*, Folia Oeconomica Cracoviensia 49, 5–30.
- Kosiorowski D. 2010a. *Depth Based Procedures for Estimation ARMA and GARCH Models*, [w:] *Proceedings of COMPSTAT'2010*, red. Y. Lechevallier, G. Saporta, 19th International Conference on Computational Statistics, Physica-Verlag, Heidelberg, 1207–1214.
- Kosiorowski D. 2010b. *Wybrane zastosowania uogólnionej głębi Tukey'a w odpornej analizie ekonomicznej*, Konferencja Statystyka Matematyczna, Wisła 2010.
- Liu R.Y., Parelius J.M., Singh K. 1999. *Multivariate Analysis by Data Depth: Descriptive Statistics, Graphics and Inference (with discussion)*, The Annals of Statistics 27, 783–858.
- Maronna R.A., Martin R.D., Yohai V.J. 2006. *Robust Statistics — Theory and Methods*, Chichester.
- Mizera I. 2002. *On Depth and Depth Poles: a Calculus*, The Annals of Statistics 30, 1681–1736.
- Mizera I., Muller C.H. 2004. *Location — Scale Depth (with Discussion and Rejoinder)*, Journal of the American Statistical Association 99(4), 981–989.
- Rousseeuw J.P., Hubert M. 1998. *Regression Depth*, Journal of The American Statistical Association 94, 388–433.
- Tsay R.S. 2010. *Analysis of Financial Time Series*, Wiley-Interscience, Hoboken, New-Yersey.
- Tukey J. 1975. *Mathematics and Picturing Data*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, red. R. James, Canadian Math. Congress 1974, 2, 523–531.
- Zuo Y., Serfling R. 2000a. *General Notions of Statistical Depth Function*, The Annals of Statistics 28, 461–482.
- Zuo Y., Serfling R. 2000b. *Structural Properties and Convergence Results for Contours of Sample Statistical Depth Functions*, The Annals of Statistics 28, 483–499.

CZASOPISMA Z ZAKRESU NAUK EKONOMICZNYCH: ANALIZA WZAJEMNYCH POWIĄZAŃ i WPŁYWU W LATACH 2003–2007*

ANNA OSIEWALSKA

Biblioteka Główna
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie
PL 31-510 Kraków, ul. Rakowicka 27
aosiew@bibl.uek.krakow.pl

Praca była przedstawiona przez autorkę na posiedzeniu Komisji Nauk Ekonomicznych i Statystyki Oddziału PAN w Krakowie, 17 grudnia 2010 r.

ABSTRACT

A. Osiewalska. *Economics journals: analysis of interaction and impact in the period 2003–2007*. Folia Oeconomica Cracoviensia 2010, 51: 57–74.

As the main channels of disseminating research, the scientific journals (especially international ones) are often the subject of analysis. The automated information systems designed by experts in the field of scientific information effectively facilitate the surveys. A similar analysis for national journals was not feasible for years, due to insufficient automation and contents of national scientific information systems. In Poland (as in many other countries where English is not dominant language in economics), academic periodicals in economics are main publication forum and remain unknown to foreign researches. It is interesting to survey these national journals, especially after 1989. Polish journals in economics were chosen therefore as the subject of the study. They have been analyzed with the support of the databases of the Main Library of the University of Economics in Cracow (UEK). The analysis of four journals in economics ("Bank i Kredyt" — "Bank and Credit", "Ekonomista", "Gospodarka Narodowa" — "National Economy" and "Przegląd Statystyczny" — "Statistical Review") during the years 2003–2007 was carried out for: a) the evaluation of their own impact on the rest of journals indexed in UEK databases; b) the evaluation of other journals impact on the journal surveyed; c) finding to what extent journals cited by economists in Polish journals are similar to those cited in international economics journals indexed in RePEc and SCOPUS databases.

KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

bibliometrics, journals evaluation, economics journals, information science
bibliometria, ewaluacja czasopism, czasopisma ekonomiczne, informacja naukowa

* Artykuł przedstawia fragmenty pracy doktorskiej *Bibliometryczna analiza czasopism z zakresu nauk ekonomicznych*, obronionej na Uniwersytecie Śląskim w 2010 roku.

„Coraz większe znaczenie czynników ekonomicznych w ogólnym życiu politycznym kraju powoduje, że nie wystarcza już tylko publicystyczne traktowanie zagadnień gospodarczych, ale konieczne jest również traktowanie ich naukowe — ściśle obiektywne, metodami naukowymi prowadzone. Nie wszystkie zresztą zagadnienia mogą być rozpatrywane na łamach fachowej prasy gospodarczej, a to ze względu na ich specjalny charakter. Tak jest na przykład ze sprawą metody badania zjawisk ekonomicznych, teorii pieniądza, kredytu, podziału, historii doktryn ekonomicznych, teorii koniunktur itp. Wprawdzie dla powyższych celów istnieją wydawnictwa książkowe, atoli książka niemal zawsze rejestruje już tylko dokonane zdobycze nauki, natomiast właściwy ruch naukowy, postęp badań, walka o metody lub wyniki badań odbywa się na łamach specjalnych czasopism. Czasopismo naukowe staje się w coraz większym stopniu obrazem ilustrującym postęp nauki”.

Fragment wkladki reklamującej zeszyt III „Ekonomisty” z 1928 roku

1. WSTĘP. ZAGADNIENIA EWALUACJI CZASOPISM

Ze względu na swą wyjątkową rolę, czasopisma naukowe są często przedmiotem analiz. Utrzymujące się w nauce kojarzenie jakości artykułu naukowego z jakością publikującego go czasopisma, przy jednoczesnej wielości czasopism sprawia, że poznać chcemy tytuły w środowisku danej nauki uznawane za najlepsze. Analiza istniejących rankingów czasopism ekonomicznych skłoniła część badaczy (Tahai i Meyer 1999) oraz (Harzing i van der Wal 2007) do kategoryzacji możliwych podejść jako opartych na preferencjach deklarowanych (*stated preference*) lub preferencjach ujawnionych (*revealed preference*). Terminologia ta wywodzi się z mikroekonomicznych badań nad zachowaniami konsumentów. Metoda preferencji deklarowanych dotyczy hipotetycznych (deklarowanych) zachowań rynkowych konsumentów i opiera się na danych zgromadzonych *a priori* za pomocą wywiadów i ankiet, które służą do rejestracji intencji wyrażanych przez konsumentów w momencie badania. Preferencje ujawnione stanowią odbicie rzeczywistych decyzji rynkowych konsumentów. Podstawą ich analizy jest najczęściej materiał statystyczny zgromadzony w wyniku rejestracji danych o przeszłych wyborach rynkowych konsumentów (Varian 2005). Rankingom czasopism, opartym na opinii środowisk lub zespołów naukowych (czy komisji ekspertów), przeciwstawia się zatem rankingi oparte na badaniach bibliometrycznych; pierwsze odpowiadałyby preferencjom deklarowanym, drugie — ujawnionym poprzez cytowanie czasopisma. W praktyce w wielu krajach podejścia te współistnieją: rankingi tworzone przez ekspertów stanowią często punkt wyjścia dla analiz bibliometrycznych, rankingi oparte na cytawalności czasopism są uważnie śledzone przez naukowców, stając się istotnym źródłem ich przyszłych opinii i ocen. Jednak w Polsce ewaluacja

czasopism wciąż pozostaje na etapie list czasopism tworzonych przez ekspertów, głównie za sprawą braku odpowiedniego materiału statystycznego, zgromadzonego w odpowiednich bazach danych.

2. ZAUTOMATYZOWANE SYSTEMY INFORMACJI NAUKOWEJ

Analizy bibliometryczne wykonywane są z wykorzystaniem zautomatyzowanych systemów informacyjnych, projektowanych przez specjalistów z zakresu informacji naukowej. Najstarszym takim systemem jest Science Citation Index (SCI), który jako baza danych w dzisiejszym rozumieniu funkcjonuje już od 1964 roku. SCI indeksuje nie tylko podstawowe dane o artykułach z czasopism naukowych, ale także zamieszczoną w tych artykułach bibliografię załącznikową. Dzięki tej dodatkowej indeksacji przypisów bibliograficznych SCI jest źródłem danych o cytowaniach — jakie artykuły z rejestrowanych w tej bazie czasopism zamieszczają i otrzymują. W roku 1965 Derek J. De Solla Price zanalizował przypisy bibliograficzne z bazy SCI, publikując w Science swój artykuł *Networks of Scientific Papers. The Pattern of Bibliographic References Indicates the Nature of the Scientific Research Front*¹. Odtąd analiza cytowań stała się ważnym i nieomal samodzielny działem bibliometrii. Tu też obserwujemy stały postęp w zakresie stosowanych metod i technik prezentacji danych, w tym najbardziej dziś znanych map nauki.

Podobne analizy w odniesieniu do czasopism polskich były przez lata niewykonalne, najpierw z powodu niedostatecznej automatyzacji, a następnie — zawartości systemów informacji naukowej. Tymczasem w naukach ekonomicznych w Polsce (podobnie jak w wielu innych krajach i w innych dziedzinach nauki) język angielski nie ma pozycji dominującej. Większa część dorobku naukowego polskich ekonomistów, opublikowanego w czasopismach to publikacje w czasopismach krajowych. Interesujące jest zatem równoległe poznanie jakie czasopisma cytują autorzy polskich czasopism z zakresu nauk ekonomicznych, zwłaszcza po roku 1989. Materiału do takiej analizy dostarczają przypisy bibliograficzne z artykułów z lat 2003–2007 z czasopism ogólnopolskich indeksowanych w bazach Biblioteki Głównej Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie. Bazy te powstały w roku 1993 jako bazy bibliograficzne. W roku 2004 zostały przeprogramowane² wg projektu autorki w kierunku indeksu cytowań.

¹ Artykuł ten pod tytułem *Siatki powiązań publikacji naukowych. Struktura ilościowa przypisów bibliograficznych świadczy o sytuacji na froncie badań* stanowi dodatek do książki *Mała nauka — wielka nauka* wydanej przez PWN w 1967 roku w serii Omega.

² Podziękowania dla mgr Janiny Ożóg za pracę programistyczną wykonaną z ogromnym zaangażowaniem i fachowością.

3. CEL, PRZEDMIOT I METODA BADANIA

Celem artykułu jest przedstawienie najważniejszych wyników analizy cytowań z czterech głównych polskich czasopism ekonomicznych: „Banku i Kredytu”, „Ekonomisty”, „Gospodarki Narodowej”, „Przeglądu Statystycznego”. W szczególności chcemy poznać czasopisma, które najsilniej wpływają na autorów publikujących w badanych czasopismach. Czy są to raczej czasopisma polskie? Które z czasopism zagranicznych inspirują najsilniej? Czy korpus czasopism, do których odwołują się polscy ekonomiści jest podobny czy zdecydowanie różny od korpusu czasopism cytowanych w ekonomicznym piśmiennictwie naukowym w świecie? Wreszcie: czy badane czasopisma o jednakowej liczbie punktów za publikację wykazują ten sam stopień oddziaływania?

Analizę przeprowadzono na 28 410 przypisach bibliograficznych z wszystkich artykułów z badanych czasopism, opublikowanych w latach 2003–2007. Przeprowadzono także analizę wpływu każdego z czterech badanych czasopism na inne czasopisma rejestrowane w bazie w latach 2003–2007. Były to czasopisma: „Badania Operacyjne i Decyzje”, „Bank i Kredyt”, „Bezpieczny Bank”, „Ekonomika i Organizacja Przedsiębiorstwa”, „Ekonomista”, „Folia Oeconomica Cracoviensia”, „Gospodarka Materiałowa i Logistyka”, „Gospodarka Narodowa”, „Handel Wewnętrzny”, „Marketing i Rynek, Marketing w Praktyce”, „Organizacja i Kierowanie”, „Personel i Zarządzanie”, „Polityka Społeczna”, „Praca i Zabezpieczenie Społeczne”, „Prawo i Podatki Unii Europejskiej”, „Problemy Jakości”, „Przegląd Organizacji”, „Przegląd Statystyczny”, „Ruch Prawniczy”, „Ekonomiczny i Socjologiczny”, „Samorząd Terytorialny”, „Wiadomości Statystyczne”, „Zagadnienia Ekonomiki Rolnej”, „Zarządzanie Zasobami Ludzkimi”, „Zeszyty Teoretyczne Rachunkowości”.

Zastosowane metody badawcze należą do metod bibliometrii³. W pracy wykorzystywać będziemy metody bibliometrii klasycznej, opisujące wpływ badanych obiektów mierzony za pomocą list frekwencyjnych i wskaźników oraz bibliometrii strukturalnej (analiza powiązań bibliograficznych, analiza współcytowań, grupowanie wyodrębnionych obiektów z wykorzystaniem analizy skupień).

³ Polska definicja terminu „bibliometria” to „badanie stanu ilościowego i tendencji rozwoju piśmiennictwa metodą statystyczną na podstawie spisów bibliograficznych lub statystyki wydawnictw” (*Słownik terminologiczny informacji naukowej*, 1979).

4. WYNIKI

Czasopisma o największym wpływie na autorów publikujących w czasopismach polskich

Łącznie w latach 2003–2007 w badanych czterech tytułach odwołano się do 1500 czasopism, z których ponad połowa (806) cytowanych była jednokrotnie. Zamieszczona dalej tabela przedstawia czasopisma cytowane co najmniej 30 razy (jest ich 47). Cytowania do tych czasopism stanowiły ponad połowę (4514 z 8886) cytowań odnoszących się do czasopism. Zauważmy, że czasopisma polskie, w liczbie 11 tytułów, stanowią prawie 25% zasobu najczęściej cytowanych czasopism (tab. 1).

Tabela 1

Periodyki, cytowane w latach 2003–2007 w głównych polskich czasopismach ekonomicznych co najmniej 30 razy

Liczba cytowań	Czasopismo	„Bank i Kredyt”	„Ekonomista”	„Gospodarka Narodowa”	„Przegląd Statystyczny”
443	„American Economic Review	102	134	195	12
274	„Bank i Kredyt”	192	31	48	3
265	„Ekonomista”	45	112	92	16
247	„Quarterly Journal of Economics”	43	68	135	1
242	„Journal of Political Economy”	57	69	95	21
214	„Journal of Finance”	97	33	33	51
207	„Rzeczpospolita”	94	78	35	0
175	„Econometrica”	41	29	31	74
155	„Gospodarka Narodowa”	17	35	103	0
148	„Przegląd Statystyczny”	1	6	0	141
136	„Economic Journal”	30	44	59	3
134	„Journal of Econometrics”	21	9	6	98
121	„Journal of Monetary Economics”	38	42	31	10
99	„Journal of Financial Economics”	36	18	24	21
97	„European Economic Review”	18	30	45	4
89	„Review of Economic Studies”	20	18	46	5
85	„Journal of Economic Perspectives”	19	29	36	1

Tabela 1 cd.

Liczba cytowań	Czasopismo	„Bank i Kredyt”	„Ekonomista”	„Gospodarka Narodowa”	„Przegląd Statystyczny”
73	„Gazeta Bankowa”	58	10	5	0
73	„Review of Economics and Statistics”	22	26	18	7
72	„Journal of Banking and Finance”	63	5	1	3
68	„Journal of Economic Literature”	15	19	32	2
68	„Journal of International Economics”	20	26	19	3
66	„Brookings Papers on Economic Activity”	21	16	29	0
60	„Journal of Money Credit and Banking”	35	13	12	0
57	„Wiadomości Statystyczne”	4	18	25	10
48	„IMF Staff Papers”	22	16	10	0
46	„Bank”	45	0	1	0
45	„Financial Times”	38	5	2	0
45	„Harvard Business Review”	11	9	23	2
45	„Journal of Public Economics”	5	13	26	1
44	„Economic Policy”	17	12	15	0
43	„Journal of the American Statistical Association”	5	2	1	35
42	„Economist”	20	16	6	0
42	„Journal of Business and Economic Statistics”	5	1	2	34
42	„World Economic Outlook”	22	16	4	0
40	„Prace Naukowe AE Wrocław”	10	0	6	24
38	„Economics Letters”	13	10	9	6
37	„Economica”	5	5	24	3
36	„Oxford Economic Papers”	7	12	16	1
35	„Weltwirtschaftliches Archiv”	6	21	7	1
34	„International Economic Review”	7	7	7	13
33	„European Economy”	25	8	0	0
31	„Gazeta Wyborcza”	12	5	13	1

Tabela 1 cd.

Liczba cytowań	Czasopismo	„Bank i Kredyt”	„Ekonomista”	„Gospodarka Narodowa”	„Przegląd Statystyczny”
30	„Journal of International Business Studies”	3	2	25	0
30	„Journal of Law and Economics”	10	5	15	0
30	„Review of Financial Studies”	13	2	6	9
30	„Rynek Terminowy”	26	0	0	4

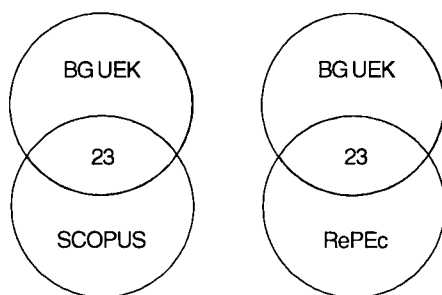
Porównania z czasopismami o największym wpływie na autorów publikujących w czasopismach o zasięgu międzynarodowym

Korpus czasopism najczęściej cytowanych przez polskich autorów porównać można z najbardziej wpływowymi czasopismami, do których odwołują się autorzy publikujący w czasopismach o zasięgu międzynarodowym, które rejestrują bazy RePEc i SCOPUS. Analizę tę wykonano wykorzystując miary wpływu bibliometrii klasycznej (czasopisma najczęściej cytowane oraz wskaźniki: Imapct Factor⁴ — IF, indeks Hirscha dla czasopism⁵ — h).

⁴ IF danego czasopisma w danym roku jest ilorazem łącznej liczby cytowań, które w danym roku zebrały artykuły opublikowane w danym czasopiśmie w dwóch latach poprzednich, do liczby artykułów, które mogły być zacytowane, tj. liczby artykułów opublikowanych w tym czasopiśmie w dwóch latach poprzednich. Indeks (miara) oddziaływania należy do grupy miar średnich. Przedstawia uśrednioną z dwóch lat cytawalność czasopisma.

⁵ Współczynnik h dla czasopisma równy jest liczbie publikacji z tego czasopisma, cytowanych co najmniej h razy. Indeks nie należy do grupy miar średnich i w tym sensie różni się całkowicie od IF. W związku z tym preferuje czasopisma publikujące dużą liczbę artykułów i czasopisma o długiej tradycji. Trudno odmówić tu pewnej logiki: wszak są to czasopisma wpływowe. Zakłócenia związane z okresem wydawania czasopism można wyeliminować poprzez czasowe ograniczenie analizy. Można zatem porównać IF z indeksem h dla czasopism dla okresu dwuletniego. Wskaźnik IF na danych z baz Thomson Reuters oraz indeks h dla czasopism wyliczony na danych z Google Scholar (w obu przypadkach dla czasopism z dziedziny ekonomii i zarządzania) okazują się silnie skorelowane (dla czasopism z siedmiu różnych subdyscyplin szczegółowych od 72% do 89%) (Harzing i van der Wal 2007). Biorąc pod uwagę łatwość obliczania indeksu h i jego dużą wartość informacyjną, podkreśla się dużą przewagę tego wskaźnika nad IF. Brak mechanizmów uśredniających stanowi siłę wskaźnika h w zakresie „obcinania” publikacji cytowanych niewielką liczbą razy, bez konieczności arbitralnego ustawiania wartości progowych.

Nie ma przeciwwskazań, by indeks ten był używany do wskazania czasopism najbardziej wpływowych w obrębie jednego czasopisma lub grupy czasopism. Obrazuje wówczas nie całkowity, lecz fragmentaryczny wpływ czasopisma na autorów danego czasopisma lub grupy czasopism. W przypadku jednego czasopisma lub grupy czasopism tej samej specjalizacji, współczynnik h dla czasopisma pozwala ocenić wpływ, jaki to czasopismo wywiera na środowisko specjalistów danej dziedziny, a także przynależność tego czasopisma do badanej specjalizacji.



Dane do tych porównań pochodzą z dwóch ogólnodostępnych serwisów internetowych: CitEc (<http://citec.repec.org>) oraz SCImago Journal & Country Rank (<http://www.scimagojr.com>). Każdy z tych serwisów dostarcza gotowych statystyk wpływu autorów i czasopism w zasobie indeksowanych czasopism. CitEc jest systemem zbudowanym na zasobie RePEc, SCImago Journal & Country Rank opiera się na bazie SCOPUS. Okazuje się, że zbiór najbardziej wpływowych czasopism cytowanych w obu tych bazach w połowie pokrywa się ze zbiorem czasopismami najczęściej cytowanymi w badanych polskich periodykach. Tytuły tych czasopism wraz ze wskaźnikiem obecności podaje tabela 2.

Tabela 2

SCOPUS	23	RePEc	23
„American Economic Review”	1	„American Economic Review”	1
„Econometrica”	1	„Econometrica”	1
„Economic Journal”	1	„Economic Journal”	1
„European Economic Review”	1	„Economic Policy”	1
„Harvard Business Review”	1	„European Economic Review”	1
„International Economic Review”	1	„International Economic Review”	1
„Journal of Banking and Finance”	1	„Journal of Business and Economic Statistics”	1
„Journal of Business and Economic Statistics”	1	„Journal of Econometrics”	1
„Journal of Econometrics”	1	„Journal of Economic Literature”	1
„Journal of Economic Literature”	1	„Journal of Economic Perspectives”	1
„Journal of Economic Perspectives”	1	„Journal of Finance”	1
„Journal of Finance”	1	„Journal of Financial Economics”	1
„Journal of Financial Economics”	1	„Journal of International Economics”	1
„Journal of International Business Studies”	1	„Journal of Law and Economics”	1
„Journal of International Economics”	1	„Journal of Monetary Economics”	1
„Journal of Monetary Economics”	1	„Journal of Money, Credit and Banking”	1
„Journal of Money, Credit and Banking”	1	„Journal of Political Economy”	1
„Journal of Political Economy”	1	„Journal of Public Economics”	1

Tabela 2 cd.

SCOPUS	23	RePEc	23
„Journal of Public Economics”	1	„Quarterly Journal of Economics”	1
„Quarterly Journal of Economics”	1	„Review of Economic Studies”	1
„Review of Economic Studies”	1	„Review of Economics and Statistics”	1
„Review of Economics and Statistics”	1	„Review of Financial Studies”	1
„Review of Financial Studies”	1	„Weltwirtschaftliches Archiv”	1
„Accounting Review”	0	„European Journal of Political Economy”	0
„American Journal of Agricultural Economics”	0	„Experimental Economics”	0
„Health Economics”	0	„Games and Economic Behavior”	0
„Industrial and Corporate Change”	0	„International Journal of Central Banking”	0
„International Journal of Production Economics”	0	„Journal of Applied Econometrics”	0
„Journal of Accounting and Economics”	0	„Journal of Comparative Economics”	0
„Journal of Accounting Research”	0	„Journal of Development Economics”	0
„Journal of Applied Econometrics”	0	„Journal of Economic Dynamics and Control”	0
„Journal of Business Ethics”	0	„Journal of Economic Surveys”	0
„Journal of Consumer Research”	0	„Journal of Economic Theory”	0
„Journal of Development Economics”	0	„Journal of Economics & Management Strategy”	0
„Journal of Economic Growth”	0	„Journal of Financial Econometrics”	0
„Journal of Economic Theory”	0	„Journal of Health Economics”	0
„Journal of Environmental Economics and Management”	0	„Journal of Human Resources”	0
„Journal of Financial and Quantitative Analysis”	0	„Journal of International Money and Finance”	0
„Journal of Health Economics”	0	„Journal of Labor Economics”	0
„Journal of Marketing”	0	„Journal of Population Economics”	0
„Journal of Marketing Research”	0	„Journal of the European Economic Association”	0
„Journal of the Academy of Marketing Science”	0	„Labour Economics”	0
„Marketing Science”	0	„Oxford Bulletin of Economics and Statistics”	0
„RAND Journal of Economics”	0	„Oxford Review of Economic Policy”	0
„Research Policy”	0	„Review of Economic Dynamics”	0
„Social Science and Medicine”	0	„Scandinavian Journal of Economics”	0
„World Development”	0	„World Bank Economic Review”	0

Czasopisma o największej liczbie cytowań w czterech głównych polskich czasopismach ekonomicznych, w dużym stopniu pokrywają się z czasopismami pierwszymi (według IF) z 226 czasopism rejestrowanych w specjalistycznej, ekonomicznej bazie RePEc oraz pierwszymi (wg indeksu Hirscha) z 264 czasopism z dziedziny ekonomii, które są w bazie SCOPUS. Mimo różnic w konstrukcji rankingów (ogólna liczba cytowań z czasopism, IF, indeks Hirscha dla czasopism) i ich nieco różnych zakresów czasowych, porównanie można uznać za dość wiarygodnie wskazujące zbiory obecnie najbardziej wpływowych czasopism w opisanych bazach. Korelacja pomiędzy IF z „Journal Citation Report” oraz ogólną liczbą cytowań z czasopism i indeksem h z SCImago Journal & Country Rank (Bollen, Van de Sompel, Hagberg i Chute, 2009), zdaje się wynikać z rzeczywistego podobieństwa tych miar.

Spora zbieżność wyłonionych tytułów wydaje się potwierdzać tezę, że czasopisma o zasięgu międzynarodowym i dużym wpływie w dziedzinie nauk ekonomicznych w nauce światowej mają także duży wpływ na autorów polskich, publikujących w badanych głównych polskich czasopismach ekonomicznych. Fakt niskiej publikowalności polskich ekonomistów w czasopismach o zasięgu międzynarodowym nie oznacza zamknięcia tego środowiska do kręgu nauki polskiej.

Porównanie badanych czasopism według ich cytowalności

W tabeli 3 przedstawiamy indeks h dla badanych czasopism oraz składowe tego indeksu: liczbę cytowanych artykułów, liczbę cytowań każdego z tych artykułów (tylko w niewielkiej części). Przedstawiono także ogólną liczbę cytowań każdego czasopisma.

Tabela 3

	Indeks h	Liczba cytowań	Liczba cytowanych artykułów																											
„Bank i Kredyt”	$h = 5$	357	235	6	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
„Ekonomista”	$h = 6$	373	204	14	7	7	6	6	6	6	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3
„Gospodarka Narodowa”	$h = 4$	241	159	6	6	5	5	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2
„Przegląd Statystyczny”	$h = 4$	199	126	9	5	5	5	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Statystyki te uzupełniamy o dane dotyczące autocytowań (procent autocytowań w poszczególnych czasopismach w latach 2003–2007):

„Bank i Kredyt”	—	2,3%,
„Ekonomista”	—	2,1%,
„Gospodarka Narodowa”	—	1,7%,
„Przegląd Statystyczny”	—	5,9%.

Mimo jednakowego statusu (ta sama liczba punktów za publikację) obserwujemy zróżnicowanie stopnia oddziaływania badanych czasopism. Periodykiem o najsilniejszym wpływie (w sensie największej liczby cytowań oraz najwyższej wartości indeksu h) jest „Ekonomista”. Niewiele mniejszą liczbą cytowań może pochwalić się „Bank i Kredyt”, znacznie krócej wydawany, ale dostępny w Internecie. Czasopismo to ma największą liczbę cytowanych artykułów i drugą co do wielkości wartość indeksu h . Poniżej przedstawiamy dane, na których oparte są wyliczenia wskaźnika h dla czasopism. Jako zasadę przyjmujemy prezentację sposobu wyliczenia wskaźnika (pierwsza kolumna poniżej załączonych tabel), a także przedstawienia wszystkich artykułów z danego czasopisma, które uczestniczyły (lub mogły uczestniczyć) w budowie wskaźnika. Dla większej porównywalności między czasopismami podajemy też wszystkie artykuły, które uzyskały co najmniej 4 cytowania (tab. 3–7).

Tabela 4

„Bank i Kredyt”, $h = 5$

h	357	Autorzy	Tytuły	Rok
1	6	Pawłowska M.	<i>Wpływ fuzji i przejęć na efektywność w sektorze banków komercyjnych w Polsce w latach 1997–2001</i>	2003
2	5	Borowski J., Brzoza-Brzezina M., Szpunar P.	<i>Exchange Rate Regimes and Poland's Participation in ERM II</i>	2003
3	5	Gradzewicz M., Kolasa M.	<i>Szacowanie luki popytowej dla gospodarki polskiej przy wykorzystaniu metody VECM</i>	2004
4	5	Koronowski, A., Rozkrut, M.	<i>Towards the Euro-zone through ERMII — Countering Fallacies</i>	2003
5	5	Reksa Ł.	<i>Sekurytyzacja wierzytelności na rynkach międzynarodowych</i>	2004
	5	Rubaszek M., Serwa D.	<i>Prognozowanie kursu walutowego. Model nadzwyczajnej stopy zwrotu z inwestycji zagranicznych</i>	2001
	4	Rogowski W.	<i>Możliwości wczesnego rozpoznawania symptomów zagrożenia zdolności płatniczej przedsiębiorstwa</i>	1999
	4	Oręziak I.	<i>Polityka budżetowa na obszarze euro</i>	2002
	4	Janicka M.	<i>Proces tworzenia jednolitego rynku finansowego Unii Europejskiej — stan obecny i perspektywy</i>	2002
	4	Lewandowski D.	<i>Ryzyko operacyjne w bankach — zarządzanie i audyt w świetle wymagań Bazylejskiego Komitetu ds. Nadzoru Bankowego</i>	2004
	4	Czyżewski A. B.	<i>Wzrost gospodarczy a popyt na pracę</i>	2002

Tabela 5

„Ekonomista”, $h = 6$

<i>h</i>	373	Autorzy	Tytuły	Rok
1	14	Liberda B., Rogut A., Tokarski T.	<i>Wzrost gospodarczy, oszczędności i inwestycje w krajach OECD i w krajach Europy Środkowej i Wschodniej</i>	2002
2	7	Tokarski T.	<i>Optymalne stopy inwestycji w modelu Mankiwa-Romera-Weila</i>	2000
3	7	Wojtyna A.	<i>Inflacja a wzrost gospodarczy</i>	1996
4	6	Kwiatkowski E., Kucharski L., Tokarski T.	<i>Bezrobocie i zatrudnienie a PKB w Polsce w latach 1993–2001</i>	2002
5	6	Kwiatkowski E., Roszkowska S., Tokarski T.	<i>Granice wzrostu bezzatrudnieniowego w Europie i krajach WNP</i>	2004
6	6	Welfe W.	<i>Empiryczne modele wzrostu gospodarczego</i>	2000
	6	Ząbkowicz A.	<i>Współczesna ekonomia instytucjonalna...</i>	2003
	5	Gotz-Kozierkiewicz D.	<i>Deficyt rachunku obrotów bieżących w gospodarce transformowanej — obiektywne przesłanki a polityka makroekonomiczna</i>	2002
	5	Lipowski A.	<i>Ekonomiczna zawodność państwa — krytyczna analiza ujęcia antyetatystycznego</i>	2002
	5	Tokarski T.	<i>Specyfikacja funkcji produkcji a równowaga długookresowego wzrostu gospodarczego</i>	2003
	5	Góra M.	<i>Wpływ systemu zabezpieczenia społecznego na rynek pracy</i>	2003

Tabela 6

„Gospodarka Narodowa”, $h = 4$

<i>h</i>	241	Autorzy	Tytuły	Rok
1	6	Liberda B., Tokarski T.	<i>Kapitał ludzki a wzrost gospodarczy w krajach OECD</i>	2004
2	6	Gorynia M., Owczarzak R.	<i>Podstawy teorii internacjonalizacji i globalizacji działalności przedsiębiorstw</i>	2004
3	5	Kwiatkowski E., Kucharski L., Tokarski T.	<i>Elastyczność zatrudnienia w przekroju sektorowym i regionalnym w Polsce</i>	2002
4	5	Sztaudynger J.	<i>Próby ekonometrycznego określenia wpływu kapitału społecznego na wzrost gospodarczy</i>	2003
	4	Kucharski L., Tokarski T.	<i>Determinanty odpływów z bezrobocia do zatrudnienia w Polsce</i>	2003
	4	Wójcik C.	<i>Dylematy polityki kursowej na drodze do członkostwa Polski w Unii Gospodarczej i Walutowej</i>	2001
	4	Góra M.	<i>Finansowanie przejścia od tradycyjnego do nowoczesnego systemu emerytalnego</i>	2002

Tabela 6 c.d.

	4	Baruk J.	<i>Innowacje, kultura innowacyjna i poziom innowacyjności przedsiębiorstw przemysłowych</i>	2002
	4	Sulimowska-Formowicz H.	<i>Nurt zasobowy w teorii firmy</i>	2002
	4	Wojtyna A.	<i>Polityka makroekonomiczna w cyklu koniunkturalnym — nowe nurty w teorii</i>	2003
	4	Burzyński W., Karpińska-Mizielińska W., Smuga T.	<i>Wpływ pomocy publicznej na konkurencyjność przedsiębiorstw</i>	2003

Tabela 7

„Przegląd Statystyczny”, $h = 4$

h	199	Autorzy	Tytuły	Rok
1	9	Hellwig Z.	<i>Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom ich rozwoju oraz zasoby i strukturę wykwalifikowanych kadr</i>	1968
2	5	Wróbel-Rotter R., Osiewalski J.	<i>Bayesowski model efektów losowych w analizie efektywności kosztowej (na przykładzie elektrowni i elektrociepłowni polskich)</i>	2002
3	5	Hozer J.	<i>Ekonometryczna interpretacja skłonności w ekonomii</i>	2002
4	5	Strahl D.	<i>Propozycja konstrukcji miary syntetycznej</i>	1978
	4	Chomętowski S., Sokołowski A.	<i>Taksonomia struktur</i>	1978
	4	Majsterek M.	<i>Zastosowanie procedury Johansena do analizy sprzężenia inflacyjnego w gospodarce polskiej</i>	1998

Dodajmy, że analizy cytawalności polskich czasopism można też przeprowadzać opierając się na programie Publish or Perish (PoP) oraz że otrzymane wyniki są zbieżne. PoP jest aplikacją zewnętrzną na Google Scholar (GS), która dostarcza statystyk w zakresie cytawalności autorów i czasopism. Pomimo stałego postępu w zakresie automatycznego przetwarzania cytowań z języków innych niż język angielski, zawilgości języka polskiego obniżają jakość podawanych statystyk. Obok zwykłych błędów, związanych z przetworzeniem cytowania (trudności w identyfikacji struktur i eliminacji duplikatów), mamy dodatkowy, spory szum związany z polskimi literami. Obniżona trafność analiz dla cytowań z publikacji polskich łączy się z mniejszym zasobem wyszukiwanych cytowań, ponieważ GS (a za nim PoP) praktycznie całą informację o cytawalności polskich naukowców i polskich czasopism w polskich publikacjach opiera na publikacjach dostępnych w pełnym tekście w Internecie. Analogiczny zasób dla naukowców i czasopism z kręgu nauki anglosaskiej jest szerszy i wykorzystuje archiwa czołowych wydawców naukowych. Bazy BG UEK uzupełniają tę lukę informacyjną.

Analizy wielowymiarowe

Prezentowane wyżej wyniki należą do klasycznej analizy danych w bibliometrii, które za swój przedmiot mają albo artykuły z czasopism (dokumenty pierwotne) albo — jak w powyżej prezentowanych przykładach — cytowania z tych artykułów (dokumenty cytowane). Sposób podejścia do tych dwóch różnych dokumentów jest niemal identyczny: analizowane są zbiory opisów bibliograficznych danego typu. Jeżeli zatem przedmiotem badania był zbiór dokumentów cytowanych, to zajmowano się nimi w oderwaniu od artykułów cytujących.

Tymczasem interesujące może być analizowanie jednocześnie obiektów (czasopism) cytowanych i cytujących. Z punktu widzenia metod statystycznych oznacza to przejście do metod statystyki wielowymiarowej. Analiza typu: czasopismo z którego pochodzą dokumenty pierwotne i czasopisma do których te dokumenty nawiązują (czasopisma, z których pochodzą dokumenty cytowane), prowadzi do poznania powiązań między czasopismami. Analizy takie stanowią przedmiot bibliometrii strukturalnej, nowego i dynamicznie rozwijającego się kierunku bibliometrii, bliskiego koncepcji *data mining* (nazywanej także wydobywaniem wiedzy z dużej ilości danych), jednej z metod analizy danych na pograniczu statystyki i informatyki. Są to analizy przeprowadzane na danych masowych, przechowywanych w bazach danych i korzystające z wielowymiarowych technik eksploracyjnych.

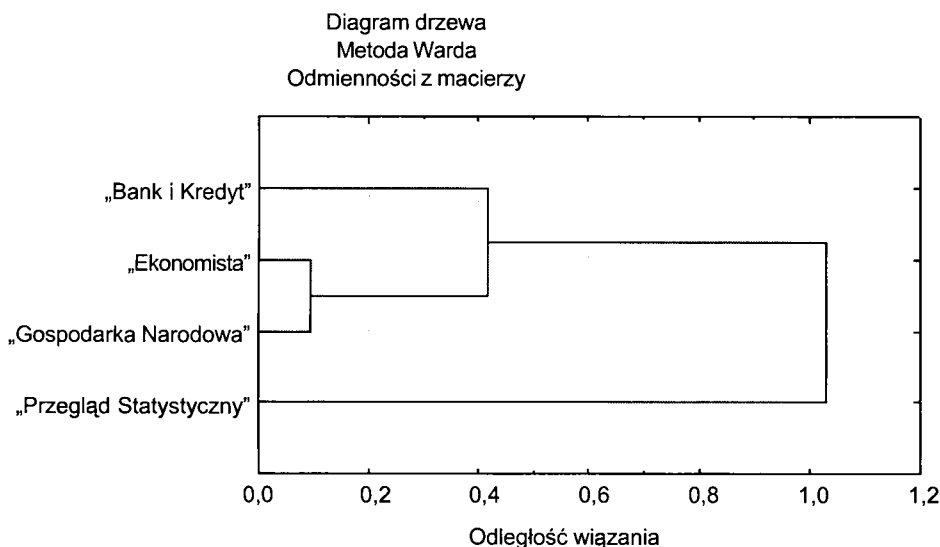
Analizy wielowymiarowe opierają się na macierzowym modelu, przedstawiającym relacje między publikacjami a ich cytowaniami, który przejmujemy za podręcznikiem bibliometrii Wolfganga Glänzela (2003). Dzięki modelowi macierzowemu, dokumenty cytujące i cytowane uzyskują reprezentację wektorową, co pozwala zmierzyć podobieństwo między następującymi obiektami:

- dokumentami cytującymi (jest to metoda powiązań bibliograficznych);
- dokumentami cytowanymi (co w bibliometrii nazywamy analizą współcytowań).

Metody te mają już długą historię w bibliometrii. Metoda powiązań bibliograficznych datuje się na rok 1963 (M. M. Kessler), metoda współcytowań została zaproponowana 10 lat później przez dwóch niezależnie od siebie pracujących badaczy — I. Marshakova oraz H. Small. Macierze podobieństwa, przekształcone następnie w macierze odległości, stanowią podstawę działania algorytmów, grupujących obiekty podobne w quasi-jednorodne skupienia. Wykonanie takich analiz umożliwiają gotowe programy, w tej pracy wykorzystujemy program STATISTICA.

Metodami bibliometrii strukturalnej (jednoczesna analiza opisów bibliograficznych 4 czasopism cytujących i ich przypisów bibliograficznych) przeprowadzona została analiza w kierunku oceny zróżnicowania badanej grupy czasopism polskich i oceny skupień czasopism w nich cytowanych.

Dendrogram uzyskany metodą powiązań bibliograficznych ukazuje wysokie podobieństwo pomiędzy „*Ekonomistą*” i „*Gospodarką Narodową*”, a także odmiennosć „*Przeglądu Statystycznego*” — zrozumiałą z powodu odmiennosć stosowanego aparatu badawczego.

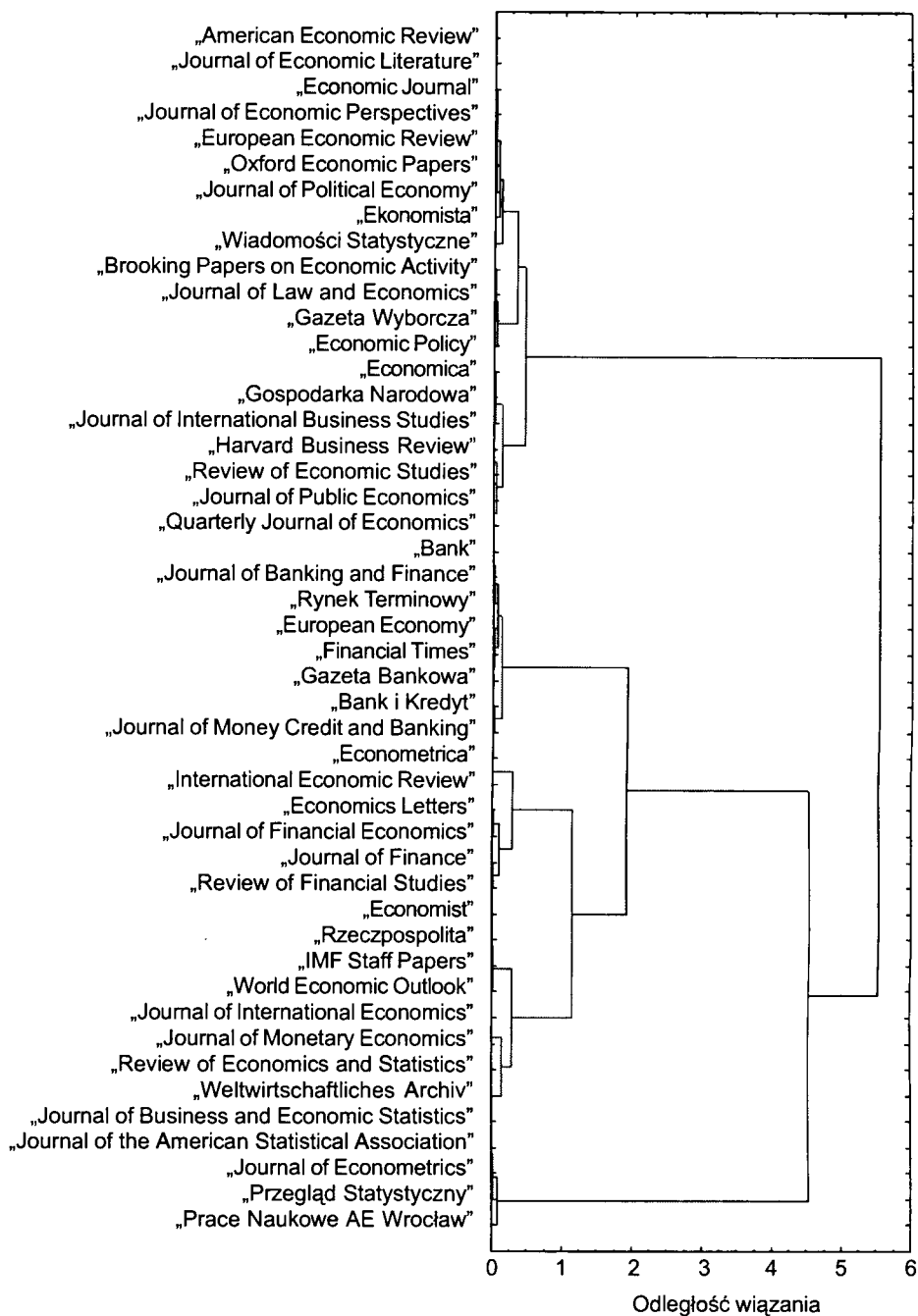


Silne podobieństwo cytowań w „*Ekonomiście*” i „*Gospodarce Narodowej*” wynika z częstego podejmowania tematyki makroekonomicznej w obu tych tytułach; najważniejsze czasopisma (najczęściej cytowane w obu wyżej wymienionych) to: „*American Economic Review*”, „*Ekonomista*”, „*Quarterly Journal of Economics*”, „*Journal of Political Economy*” i „*Gospodarka Narodowa*”.

Dendrogram uzyskany metodą współcytowań pokazuje, że zbiór najczęściej cytowanych czasopism ma swoją strukturę zbieżną ze specjalizacją czasopism cytujących (wyraźne trzy skupienia czasopism pozwalające wyodrębnić następujące grupy tematyczne: ekonomia, finanse, ekonometria).

Wyniki analiz przedstawiają informację nową nawet dla specjalistów mających pewne intuicje co do zawartości omawianych czasopism. Uzasadnia to postulat traktowania analiz bibliometrycznych jako koniecznej alternatywy wobec subiektywnych przeglądów piśmiennictwa danej dyscypliny i subiektywnych ocen czasopism. Informacja o odbiorze dzieła przez środowisko naukowe ma duży walor także dla niespecjalistów, którzy w inny niż pokazano sposób, informacji tej nigdy nie otrzymają. Jest to zatem także metoda popularyzacji aktualnych trendów w danej dyscyplinie wiedzy.

Diagram drzewa
Metoda Warda
Odmienności z macierzy



BIBLIOGRAFIA

- Bollen J., Van de Sompel H., Hagberg A. Chute R. 2009. *A principal component analysis of 39 scientific impact measures*. [online] [dostęp 3 grudnia 2010]. Dostępny w World Wide Web: http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0902/0902.2183v1.pdf.
- Glänzel W. 2003. *Bibliometrics as a research field. A course on theory and application of bibliometric indicators. Course Handouts*. [on-line], [dostęp 3 grudnia 2010]. Dostępny w World Wide Web: http://www.norslis.net/2004/Bib_Module_KUL.pdf.
- Harzing A.-W.K., van der Wal R. 2007. *Comparing the Google Scholar H-index with the ISI Journal Impact Factor*, [w:] Prof. Anne-Wil Harzing [online], [dostęp 3 grudnia 2010]. Dostępny w World Wide Web: http://www.harzing.com/h_indexjournals.htm.
- Tahai A., Meyer M.J. 1999. *A revealed preference study of management journals« direct influences*. Strategic Management Journal, 20, 279–296.
- Varian H.R. 2005. *Mikroekonomia: kurs średni. Ujęcie nowoczesne*. Warszawa, Wydaw. Naukowe PWN.

ESTYMACJA RYZYKA RYNKOWEGO W OPARCIU O MODELE GARCH I TEORIĘ WARTOŚCI EKSTREMALNYCH*

BARTOSZ SPAŁEK

42-200 Częstochowa, ul. Wierzbowa 24/13

e-mail: bartosz.spalek@gmail.com

Praca była przedstawiona przez autora 9 lipca 2010 r. na sesji Współczesna ekonometria w badaniach empirycznych młodych ekonomistów, którą zorganizowały: Komisja Nauk Ekonomicznych Polskiej Akademii Umiejętności, Komisja Nauk Ekonomicznych i Statystyki Oddziału PAN w Krakowie, Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie.

ABSTRACT

B. Spalek. *Estimation of market risk based on GARCH models and extreme value theory*. Folia Oeconomica Cracoviensia 2010, 51: 75–96.

This paper discusses estimation of two measures of market risk: Value at Risk and Expected Shortfall. Presented here approach is based on the use of GARCH models and extreme value theory. GARCH models with different innovation distributions were used to estimate the current volatility, while extreme value theory was used to model the tail of the innovation distribution of the GARCH model. This approach enabled to estimate separately the volatility of the financial market and the tails of the log return distribution, which led up to more precise estimation of heaviness of the tails. Backtesting enabled to compare the results of the proposed method with other standard approaches used in market risk estimation. Analysis was conducted for log returns of WIG20 index from 9 years period.

KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

value at risk, expected shortfall, POT method

wartość zagrożona, oczekiwany niedobór, metoda POT

* Oparto na pracy magisterskiej autora przygotowanej w Katedrze Ekonometrii i Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie pod kierunkiem J. Osiewalskiego.

1. WSTĘP

Zarządzanie ryzykiem finansowym jest subdziedziną, w której w ostatnich latach nastąpił bardzo dynamiczny rozwój. Najważniejszym etapem zarządzania ryzykiem jest jego pomiar. W tym zakresie zaproponowanych zostało wiele metod, a duża część z nich znalazła swoje zastosowanie w praktyce. Odpowiednie oszacowanie ryzyka jest kluczowym elementem zarządzania ryzykiem, ponieważ pozwala kierownictwu podmiotu gospodarczego zobrazować rozmiar możliwych, przyszłych strat, a także zbudować odpowiedni portfel inwestycyjny. Wiele instytucji finansowych do pomiaru ryzyka jest zobowiązanych ze względu na istniejące przepisy i regulacje prawne.

Niniejsza praca dotyczy estymacji ryzyka rynkowego z wykorzystaniem modeli GARCH i teorii wartości ekstremalnych. Ryzyko rynkowe jest jednym z rodzajów ryzyka finansowego, które wynika ze zmian cen na rynkach finansowych. Jego pomiar opiera się na dwóch najczęściej stosowanych miarach w praktyce: wartości zagrożonej (*Value at Risk*) oraz oczekiwanym niedoborze (*Expected Shortfall*). Teoria wartości ekstremalnych jest dziedziną statystyki, która w tym przypadku może pozwolić na lepsze modelowanie danych finansowych leżących w ogonach rozkładu empirycznego.

Celem pracy jest porównanie metod estymacji ryzyka z wykorzystaniem teorii wartości ekstremalnych, zastosowanych bezpośrednio do danych lub łącznie z ekonometrycznym modelem zmienności. Jak wykazują badania empiryczne finansowe szeregi czasowe nie spełniają założenia o niezależności obserwacji. Założenie to jest wymagane w przypadku stosowania metod wywodzących się z teorii wartości ekstremalnych. Podstawową kwestią jest sprawdzenie czy podejście, w którym założenie to jest ewidentnie niespełnione może przynieść satysfakcjonujące rezultaty. Dodatkowo, ważnym aspektem jest sprawdzenie jak metody bazujące na teorii wartości ekstremalnych wypadają na tle innych standardowych metod stosowanych w praktyce.

Empiryczna analiza ryzyka jest przeprowadzana dla logarytmicznych stóp zwrotu kursu zamknięcia indeksu WIG20. Badany okres obejmuje 9-letni szereg czasowy od 4 grudnia 2000 roku do 1 grudnia 2009 roku i zawiera 2257 obserwacji.

Estymacja ryzyka oparta na teorii wartości ekstremalnych zyskała dużą popularność pod koniec lat 90. ubiegłego wieku. We wszystkich jednak pracach zagadnienie to było rozpatrywane bez modelowania zmienności. Podejście łączące teorię wartości ekstremalnych i ekonometryczne modele zmienności zaproponowane zostało po raz pierwszy w pracy McNeila i Freya (2000). Od tego czasu podejście to stało się popularne i było często wykorzystywane w analizie ryzyka, zwłaszcza dla nowych rynków finansowych, które charakteryzowały się dużą zmiennością i występowaniem bardzo dużych spadków wartości (Kuester i in. 2006, Maghyreh i in. 2008). Podejście to zastosowano również do modelowania zmian cen energii elektrycznej (Bystrom 2005).

2. POMIAR RYZYKA

Miarą ryzyka rynkowego, która w praktyce zyskała ogromną popularność w ostatnich kilkunastu latach, jest wartość zagrożona (*Value at Risk*). Jest to taka strata, której prawdopodobieństwo osiągnięcia lub przekroczenia w zadanym okresie jest równe zadanemu poziomowi tolerancji (Jajuga i in. 2007).

Wartość zagrożoną można zapisać w postaci następującego wzoru:

$$P(W \leq W_0 - VaR) = \alpha, \quad (1)$$

gdzie:

W — wartość rynkowa na koniec rozpatrywanego okresu;

W_0 — obecna wartość rynkowa;

VaR — wartość zagrożona;

α — poziom tolerancji.

Formalnie określenie *Value at Risk* odnosi się do zmiennej ryzyka, którą jest wartość rynkowa, np. pojedynczego instrumentu finansowego, portfela instrumentów finansowych, przedsiębiorstwa. Jednak wartość zagrożoną łatwo można przedstawić w postaci zależnej od kwantyla rozkładu stóp zwrotu.

Wartość zagrożona związana jest z kwantylem rzędu α rozkładu wartości rynkowej (oznaczonym poniżej jako W_α) równaniem:

$$W_\alpha = W_0 - VaR. \quad (2)$$

Z kolei kwantyl rzędu α rozkładu logarytmicznych stóp zwrotu (x_α) zapisuje się następująco:

$$x_\alpha = 100(\ln W_\alpha - \ln W_0). \quad (3)$$

Po przekształceniach wzorów (2) i (3) otrzymujemy bezpośrednie określenie wartości zagrożonej za pomocą kwantyla rozkładu logarytmicznych stóp zwrotu:

$$VaR = W_0 \left(1 - \exp \left(\frac{1}{100} x_\alpha \right) \right). \quad (4)$$

Wyznaczenie wartości zagrożonej przy poziomie tolerancji α sprowadza się zatem do znalezienia kwantyla rzędu α rozkładu logarytmicznych stóp zwrotu, a następnie poddaniu go stosownej transformacji¹.

Główną wadą wartości zagrożonej jest fakt, że nie podaje ona informacji na temat wysokości spodziewanej straty, gdy ta przekroczy wartość zagrożo-

¹ W pracy tej policzony zostanie kwantyl logarytmicznych stóp zwrotu i jego oczekiwana warunkowa wartość przekroczenia, do której dalej odnosi się termin oczekiwany niedobór. Należy jednak pamiętać, że wartość zagrożona jest kwantylem rozkładu wartości portfela i w celu jej formalnego obliczenia należałoby użyć transformacji kwantyla analizowanych stóp zwrotu danej wzorem (4).

ną. Ta niedogodność została wyeliminowana w innej mierze ryzyka, która nosi nazwę *Expected Shortfall*, co w polskiej literaturze przedmiotu określane jest jako oczekiwany niedobór. Określona jest ona wzorem:

$$ES = E(L \mid L > VaR), \quad (5)$$

gdzie: L — wielkość straty, czyli $L = W - W_0$.

Jak wynika ze wzoru, jest to oczekiwana strata, pod warunkiem, że strata ta przekroczy wartość zagrożoną. Miara ta może być zatem traktowana jako uzupełnienie wartości zagrożonej (Jajuga i in. 2007).

Niech $(X_t, t \in Z)$ będzie procesem stochastycznym, którego realizacją jest szereg czasowy reprezentujący ujemne logarytmiczne stopy zwrotu². Zakłada się, że dynamika X_t dana jest formułą:

$$X_t = \mu_t + \sigma_t Z_t, \quad (6)$$

gdzie $\{Z_t\} \sim \text{iid}(0,1)$ o brzegowym rozkładzie $F_Z(\cdot)$. Zakłada się, że warunkowa średnia μ_t i warunkowa zmienność σ_t są mierzalne względem G_{t-1} , czyli względem historii procesu $\{X_t\}$ do dnia $t-1$.

Niniejsza praca zajmować się będzie kwantylem i oczekiwanym niedoborem dla jednokrokowych predykcji rozkładu logarytmicznych stóp zwrotu. Ponieważ:

$$F_{X_{t+1}|G_t}(x) = P\{\sigma_{t+1}Z_{t+1} + \mu_{t+1} \leq x \mid G_t\} = F_Z((x - \mu_{t+1})/\sigma_{t+1}), \quad (7)$$

więc miary X_q^t i S_q^t te upraszczają się do:

$$X_q^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}z_q, \quad (8)$$

$$S_q^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}E[Z \mid Z > z_q]. \quad (9)$$

gdzie X_q^t jest kwantylem logarytmicznych stóp zwrotu, S_q^t oczekiwanym niedoborem, a z_q jest q -tym kwantylem brzegowego rozkładu zmiennej Z_t .

W celu estymacji tych miar należy wybrać konkretny proces do modelowania dynamiki warunkowej średniej i zmienności. W tej pracy wykorzystano oszczędny, ale efektywny proces AR(1)-GARCH(1,1), który opisuje się równaniami:

$$X_t = \omega_0 + \omega_1 X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (10)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t Z_t, \quad (11)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \delta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (12)$$

gdzie $\{Z_t\} \sim \text{iid}(0,1)$, $\alpha_0 > 0$ i $\alpha_1 \geq 0$ oraz $\delta_1 \geq 0$.

² Przez ujemne logarytmiczne stopy zwrotu rozumie się tu stopy przemnożone przez -1 . W przypadku miar ryzyka rynkowego interesujące są duże spadki wartości, które reprezentowane są przez lewy ogon rozkładu. Zmiana znaku stóp zwrotu spowoduje, że analiza będzie wykonywana dla prawego ogona, a straty będą wartościami dodatnimi.

Do estymacji parametrów przedstawionego modelu stosuje się metodę największej wiarygodności.

3. ROZKŁADY BŁĘDU W MODELACH GARCH

Przy założeniu, że zmienne losowe Z_t mają rozkład normalny kwantyl innowacji Z_t równy jest $\Phi^{-1}(q)$, gdzie $\Phi(z)$ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego. Z kolei oczekiwany niedobór, w tym przypadku wylicza się za pomocą formuły:

$$S_q^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} \frac{\phi(\Phi^{-1}(q))}{1-q}, \quad (13)$$

gdzie $\phi(z)$ jest funkcją gęstości standardowego rozkładu normalnego.

Badania empiryczne wskazują, że normalność rozkładów zakładana w modelach GARCH nie jest wystarczająca do opisu tzw. grubych ogonów. W celu lepszego dopasowania modeli jednym z najczęściej stosowanych, jako alternatywny rozkład zmiennej Z_t , jest standaryzowany rozkład t -Studenta z liczbą stopni swobody ν ($\nu > 2$). Jest to rozkład symetryczny o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariancji. Jego funkcja gęstości jest postaci:

$$g(z) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\pi(\nu-2)\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{z^2}{\nu-2}\right)^{\frac{-(\nu+1)}{2}}}, \quad (14)$$

gdzie Γ jest funkcją gamma.

W tym przypadku oczekiwany niedobór liczony jest jako:

$$S_q^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} \frac{g(t^{-1}(q))}{1-q} \left(\frac{\nu + (t^{-1}(q))^2}{\nu-1} \right), \quad (15)$$

gdzie t jest dystrybuantą standaryzowanego rozkładu t -Studenta.

Liczba stopni swobody jest dodatkowym parametrem szacowanym łącznie z innymi parametrami modelu GARCH.

Empiryczne rozkłady danych finansowych, oprócz własności grubych ogonów, charakteryzują się często skośnością. W celu wychwycenia tego zjawiska, stosuje się skośny rozkład t -Studenta. Skośny, ale niestandaryzowany rozkład t -Studenta zastosowali po raz pierwszy w modelu GARCH Osiewalski i Pipień (1999). Przy założeniu, że $\nu > 2$ oraz $\gamma > 0$, mówimy, że zmienna Z_t ma standaryzowany skośny rozkład t -Studenta z liczbą stopni swobody ν i współczynnikiem asymetrii γ , $Z_t \sim \text{SKST}(0, 1, \gamma, \nu)$, jeśli jego gęstość wyraża się wzorem:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{2}{\gamma + \gamma^{-1}} sg(\gamma(sz + m)), & z < -\frac{m}{s} \\ \frac{2}{\gamma + \gamma^{-1}} sg((sz + m)/\gamma), & z \geq -\frac{m}{s} \end{cases}, \quad (16)$$

gdzie g jest gęstością standaryzowanego rozkładu t -Studenta z ν stopniami swobody, określoną wzorem (14), a:

$$m = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}(\gamma - \gamma^{-1}), \quad (17)$$

$$s = \sqrt{\gamma^2 + \gamma^{-2} - 1 - m^2}. \quad (18)$$

Zakładając q na tyle duże, że ogon standaryzowanego skośnego rozkładu t -Studenta znajdować się będzie na prawo od modalnej, do przybliżonej estymacji oczekiwanego niedoboru można zastosować wzór dla przypadku symetrycznego rozkładu t -Studenta, odpowiednio przeskalowany współczynnikiem asymetrii γ .

$$S'_q = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} \gamma \frac{g(t^{-1}(q))}{1-q} \left(\frac{\nu + (t^{-1}(q))^2}{\nu - 1} \right). \quad (19)$$

4. TEORIA WARTOŚCI EKSTREMALNYCH

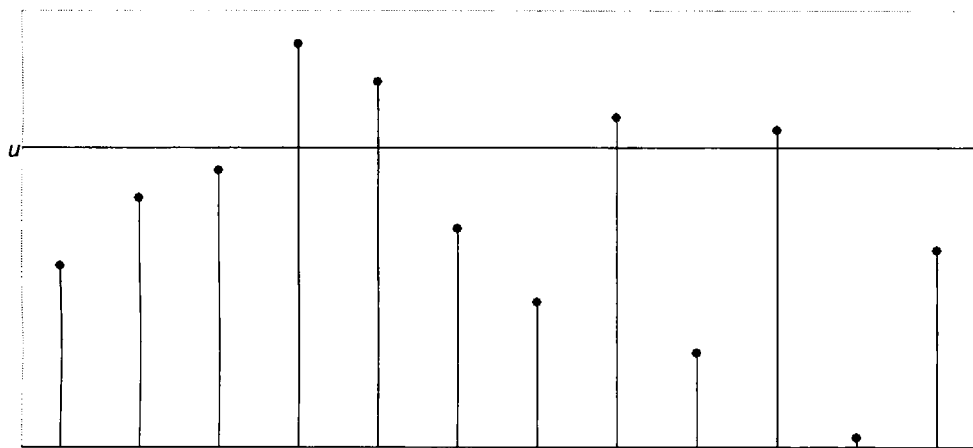
W niniejszej pracy zostanie wykorzystana również teoria wartości ekstremalnych. Jako wartości ekstremalne uważać się będzie te realizacje zmiennej losowej, które przekraczają pewną ustaloną, wysoką wartość (próg). W tym podejściu nie ma obawy, że do estymacji parametrów rozkładu wykorzystywane będą niskie wartości zmiennej losowej (Gilli i Këllezi 2006).

Dystrybuenta wartości przekraczających pewien ustalony próg rozpatrywana jest w metodzie POT (*Peak ove Threshold*). Problem ten zilustrowany jest na rycinie 2 — przedstawiona jest dystrybuenta F zmiennej losowej X .

Poszukiwana jest postać dystrybenty F_u , która zwana jest dystrybentą warunkowego przekroczenia. Można ją zdefiniować następująco:

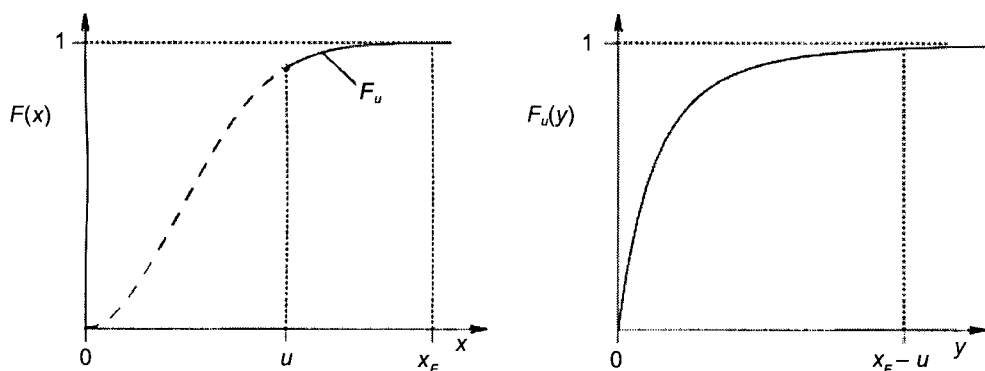
$$F_u(y) = P(X - u \leq y \mid X > u), \quad 0 \leq y \leq x_F - u \quad (20)$$

gdzie: $x_F = \max\{x: F(x) < 1\}$, u jest ustalonym progiem, a $y = x - u$ nadwyżkami nad progiem.



Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 1. Wartości ekstremalne, jako wartości przekraczające ustalony próg



Źródło: Gilli i Këllezi 2006.

Ryc. 2. Dystrybuanta F i dystrybuantą warunkowego przekroczenia F_u

Realizacje zmiennej losowej X leżą przeważnie pomiędzy 0, a wartością progu u , stąd estymacja funkcji $F_u(y)$ może być trudna ze względu na niewielką liczbę obserwacji. Na tym etapie teoria wartości ekstremalnych okazuje się bardzo użyteczna, jako że dostarcza twierdzenia opisującego asymptotyczne zachowanie dystrybuanty $F_u(y)$.

Twierdzenie 1. [Pickands (1975), Balkema i de Haan (1974)]. Dla dużej rodziny rozkładów, warunkowa dystrybuanta przekroczenia dla dużych wartości progu u jest dobrze aproksymowana przez uogólniony rozkład Pareto (*Generalized Pareto Distribution — GPD*):

$$F_u(y) \approx G_{\xi, \beta}(y), \quad u \rightarrow x_F, \quad (21)$$

gdzie:

$$G_{\xi,\beta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\beta} y\right)^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right) & \xi = 0 \end{cases}, \quad (22)$$

dla $y \in [0, (e_F - u)]$ w przypadku $\xi \geq 0$ oraz $y \in [0, -\frac{\beta}{\xi}]$ w przypadku $\xi < 0$.

W praktyce problem stanowi wybór wartości progu. Wraz ze wzrostem progu maleje liczba obserwacji użytych do estymacji modelu, a tym samym rośnie wariancja estymatorów. Z kolei próg wybrany zbyt nisko powoduje obciążenie estymacji ze względu na wykorzystanie obserwacji pochodzących z środka rozkładu (Śmiech 2002).

Zakładając funkcję GPD dla ogonów rozkładu, wartość zagrożona i oczekiwany niedobór mogą być wyrażone za pomocą parametrów uogólnionego rozkładu Pareto.

W niniejszej pracy liczba obserwacji w ogonie będzie ustalona z góry $N_u = k$. W konsekwencji próg będzie zmienną losową — równy $(k+1)$ -szej reszcie. Niech $z_{(1)} \geq z_{(2)} \geq \dots \geq z_{(n)}$ będą uszeregowanymi resztami, liczonymi jako:

$$(z_{t-n+1}, \dots, z_t) = \left(\frac{X_{t-n+1} - \hat{\mu}_{t-n+1}}{\hat{\sigma}_{t-n+1}}, \dots, \frac{X_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\sigma}_t} \right). \quad (23)$$

Uogólniony rozkład Pareto z parametrami ξ i β będzie dopasowywany do nadwyżek nad progiem z reszt przekraczających próg, czyli do szeregu: $(z_{(1)} - z_{(k+1)}, \dots, z_{(k)} - z_{(k+1)})$.

Kwantyl innowacji, który potrzebny jest do szacowania kwantyla rozkładu stóp zwrotu, wyraża się wzorem:

$$\hat{z}_q = z_{(k+1)} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{1-q}{k/n} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right). \quad (24)$$

Natomiast oczekiwany niedobór wynosi:

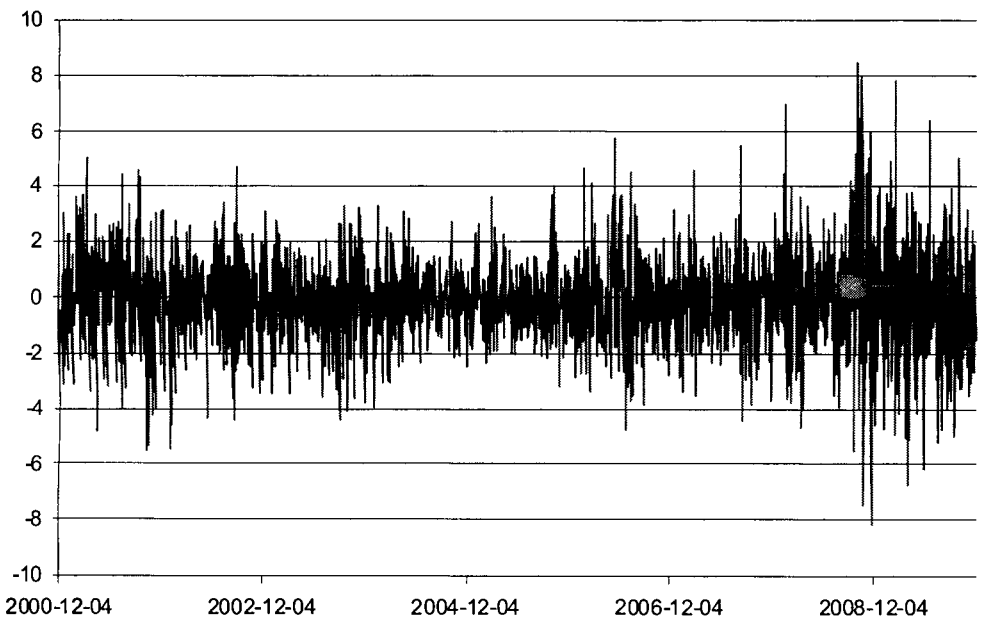
$$\hat{S}_q^t = \hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1} \hat{z}_q \left(\frac{1}{1-\hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi} z_{(k+1)}}{(1-\hat{\xi}) \hat{\xi}_q} \right). \quad (25)$$

5. WYNIKI BADAŃ EMPIRYCZNYCH

Analiza została przeprowadzona dla ujemnych, dziennych logarytmicznych stóp zwrotu pochodzących z kursów zamknięcia indeksu warszawskiej giełdy WIG20. Badany okres obejmował obserwacje od 4 grudnia 2000 roku do 1 grudnia 2009 roku i zawierał 2257 stóp zwrotu.

Na rycinie 3 zostały przedstawione ujemne logarytmiczne stopy zwrotu, liczone jako $X_t = -100 \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)$, gdzie P_t oznacza wartość indeksu w chwili t .

Analizując poniższy wykres zauważyć można, że stopy zwrotu mają tendencję do skupiania się w wąskich pasmach czasu. Co więcej, widać, że w badanym szeregu czasowym występują podokresy o różnej wielkości zmienności. Największą zmienność zaobserwowano pod koniec 2008 roku, kiedy to indeks WIG20 zaczął bardzo tracić na wartości.



Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 3. Wartości ujemnych logarytmicznych stóp zwrotu

W tabeli 1 zostały przedstawione podstawowe charakterystyki opisowe dla analizowanych stóp zwrotu. Średnia zbliżona do zera, prawostronna asymetria i kurtoza większa niż w przypadku rozkładu normalnego są zgodne z empirycznymi własnościami danych finansowych. Porównanie wartości pierw-

Tabela 1

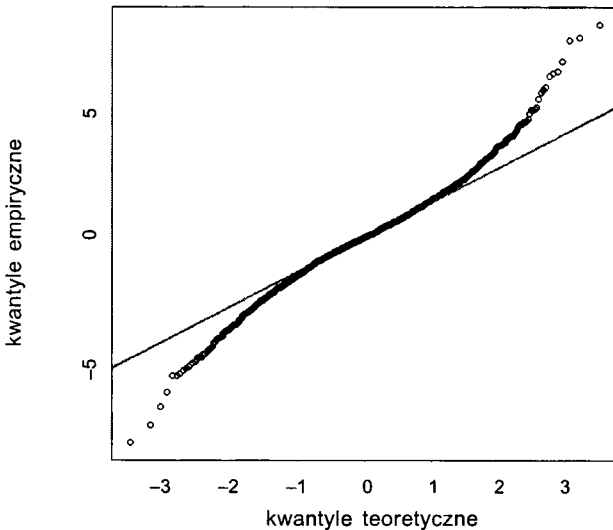
Podstawowe statystyki opisowe

Średnia	Wariancja	Odchylenie standardowe	Asymetria	Kurtoza	Minimum	Kwartył pierwszy	Mediana	Kwartył trzeci	Maksimum
-0,0168	2,8398	1,6852	0,0826	4,9137	-8,1548	-0,9292	-0,0177	0,9231	8,4428

Źródło: opracowanie własne.

szego i trzeciego kwartyła z wartościami minimalnymi i maksymalnymi wskazuje na występowanie grubych ogonów i leptokurtyczny charakter rozkładu.

Rycina 4 przedstawiający wykres kwantyl-kwantyl ujemnych logarytmicznych stóp zwrotu potwierdza ten wniosek. Na osi poziomej umieszczone zostały kwantyle standardowego rozkładu normalnego. Odchylenie od prostej świadczy o cięższych ogonach niż ogony rozkładu normalnego.



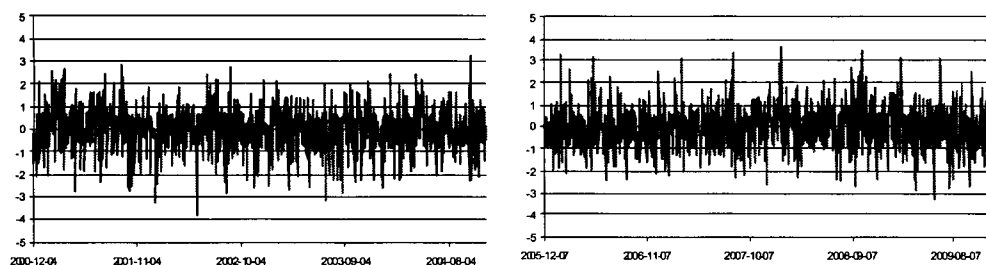
Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 4. Wykres kwantyl-kwantyl ujemnych logarytmicznych stóp zwrotu

Założono, że ujemne logarytmiczne stopy zwrotu są realizacją procesu AR(1)-GARCH(1,1) o jednym z trzech rozpatrywanych rozkładów warunkowych: standardowym rozkładzie normalnym, standaryzowanym rozkładzie t -Studenta oraz standaryzowanym skośnym rozkładzie t -Studenta.

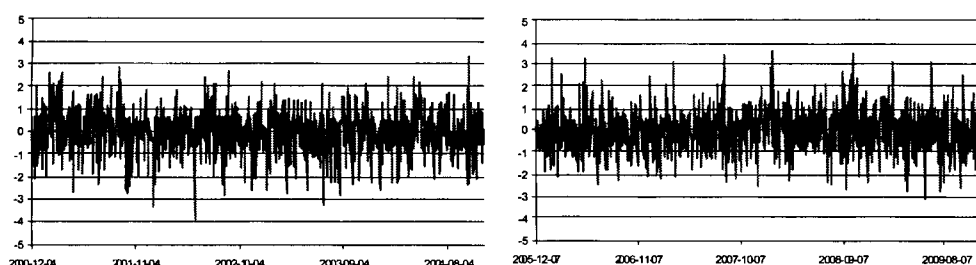
W celu nieformalnej oceny dopasowania modelu AR-GARCH sprawdzono czy standaryzowane reszty są generowane przez ciąg niezależnych zmiennych losowych o założonym w modelu rozkładzie. Analiza była przeprowadzona zarówno dla całego badanego okresu, jak i dla dwóch podokresów. Pierwszy podokres zawierał 1000 pierwszych obserwacji, natomiast drugi — 1000 ostatnich. Każde 1000 obserwacji to około 4 lata badanego szeregu.

Ryciny 5–7 przedstawiają standaryzowane reszty uzyskane w modelu o różnych rozkładach błędu. Założenie odmiennych rozkładów nie wpływa zasadniczo na wielkość analizowanych reszt i co do wartości nie różnią się one znacząco. Porównując te wykresy z ryciną 3, przedstawiającą ujemne logarytmiczne stopy zwrotu, można zauważyć, że założenie iid jest bardziej prawdopodobne dla standaryzowanych reszt.



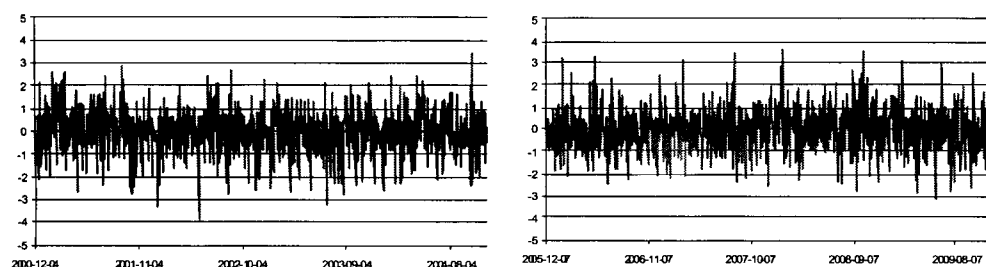
Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 5. Standaryzowane reszty z modelu AR(1)-GARCH(1,1) o warunkowym rozkładzie normalnym dla pierwszego i drugiego okresu



Źródło: opracowanie własne.

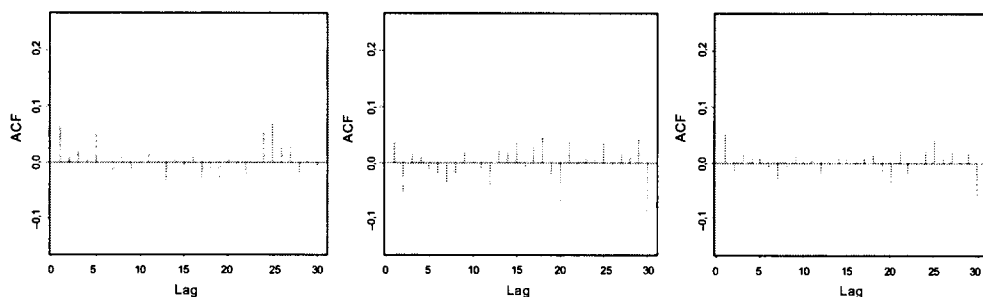
Ryc. 6. Standaryzowane reszty z modelu AR(1)-GARCH(1,1) o warunkowym rozkładzie t -Studenta dla pierwszego i drugiego okresu



Źródło: opracowanie własne.

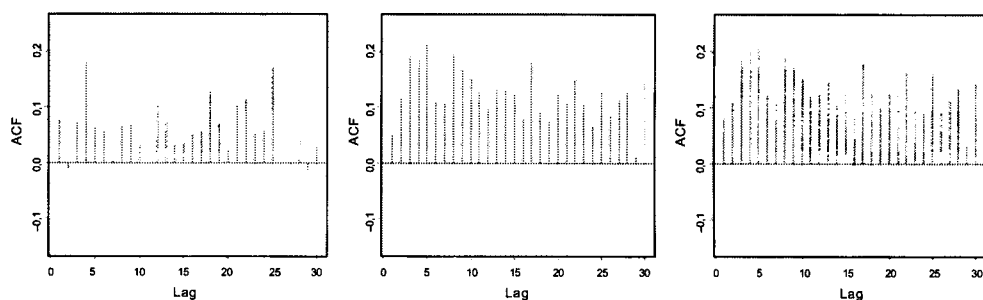
Ryc. 7. Standaryzowane reszty z modelu AR(1)-GARCH(1,1) o warunkowym skośnym rozkładzie t -Studenta dla pierwszego i drugiego okresu

Na kolejnych wykresach przedstawiono korelogramy dla stóp zwrotu oraz ich kwadratów, a także dla standaryzowanych reszt i ich kwadratów. Podczas, gdy stopy zwrotu na pewno nie są generowane przez ciąg niezależnych zmiennych losowych o założonym w modelu rozkładzie, to w przypadku standaryzowanych reszt założenie to wydaje się prawdziwe.



Źródło: opracowanie własne.

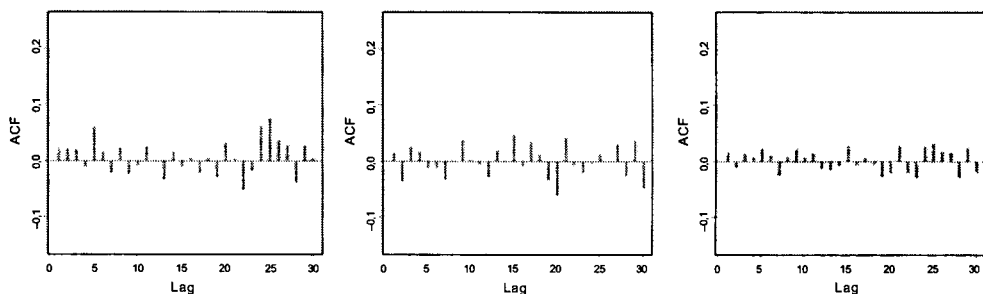
Ryc. 8. Korelogramy stóp zwrotu kolejno dla pierwszego, drugiego i całego okresu



Źródło: opracowanie własne.

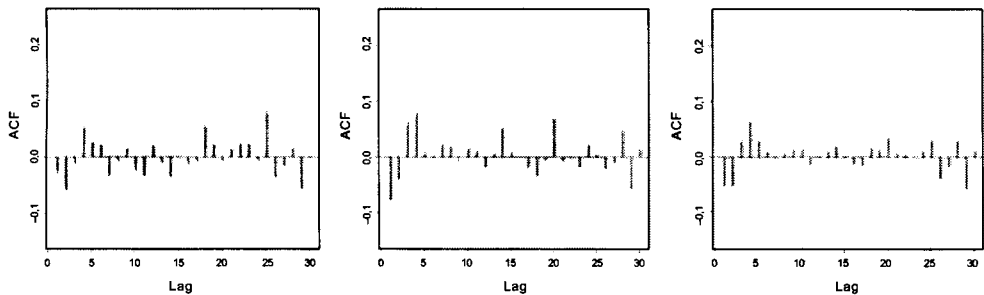
Ryc. 9. Korelogramy kwadratów stóp zwrotu kolejno dla pierwszego, drugiego i całego okresu

Na następnych korelogramach przy każdym opóźnieniu przedstawione są wartości dla reszt uzyskanych kolejno przy założeniu warunkowego rozkładu normalnego, rozkładu t -Studenta i skośnego rozkładu t -Studenta.



Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 10. Korelogramy standaryzowanych reszt kolejno dla pierwszego, drugiego i całego okresu



Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 11. Korelogramy kwadratów standaryzowanych reszt kolejno dla pierwszego, drugiego i całego okresu

Tabela 2 przedstawia wartości statystyki testowej Ljung-Boxa oraz *p-value* dla stóp zwrotu, ich kwadratów, standaryzowanych reszt uzyskanych, przy założeniu różnych rozkładów błędu oraz ich kwadratów.

Tabela 2

Wartości statystyki i *p-value* testu Ljunga-Boxa

	Statystyka testowa			<i>p-value</i>		
	I okres	II okres	całość	I okres	II okres	całość
Stopy	29,9717	37,1051	39,7032	0,4671	0,1741	0,1107
Kwadraty stóp	172,3366	520,1130	1307,6110	<2,2e-16	<2,2e-16	<2,2e-16
Reszty w modelu o warunkowym rozkładzie normalnym	28,1347	23,1294	24,9442	0,5633	0,8099	0,7277
Kwadraty reszt w modelu o warunkowym rozkładzie normalnym	32,8118	35,4433	48,8865	0,3308	0,2269	0,01614
Reszty w modelu o warunkowym rozkładzie <i>t</i> -Studenta	29,1322	23,1926	25,2144	0,5107	0,8073	0,7145
Kwadraty reszt w modelu o warunkowym rozkładzie <i>t</i> -Studenta	31,0055	35,934	49,9007	0,4151	0,2102	0,0127
Reszty w modelu o warunkowym skośnym rozkładzie <i>t</i> -Studenta	28,8225	23,2025	25,1118	0,5269	0,8068	0,7196
Kwadraty reszt w modelu o warunkowym skośnym rozkładzie <i>t</i> -Studenta	31,0532	35,9929	49,6384	0,4128	0,2083	0,01352

Źródło: opracowanie własne.

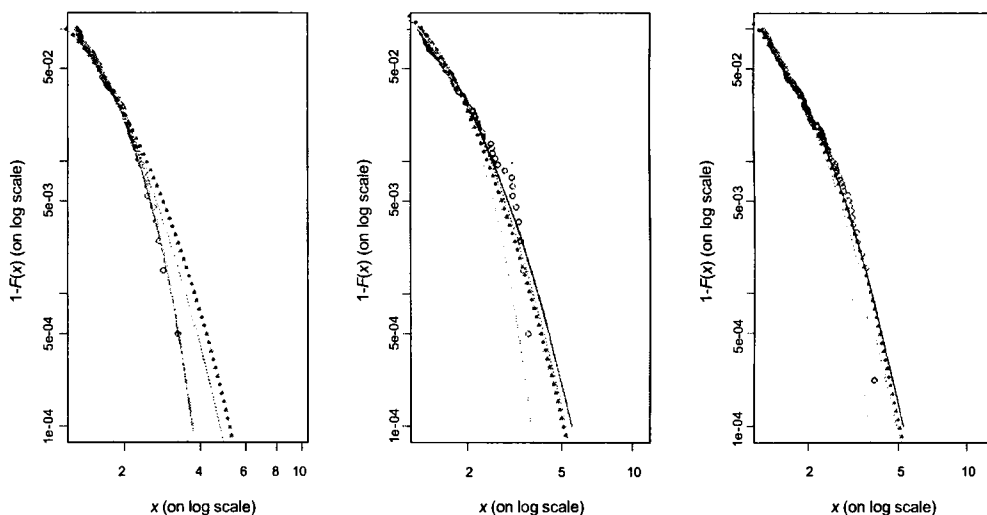
Analizując powyższą tabelę należy stwierdzić, że założenie o niezależności badanych stóp zwrotu jest fałszywe, o czym świadczą zerowe *p-value* dla kwadratów stóp dla każdego z okresów. Z kolei co do standaryzowanych reszt założenie to można uznać za prawdziwe. Największe wartości *p-value* uzyskuje się dla reszt pochodzących z modelu o warunkowym rozkładzie normalnym, a niewiele mniejsze dla reszt pochodzących z modelu o założeniu rozkładu *t*-Studenta i skośnego *t*-Studenta.

Na rycinach 12–14 przedstawione są estymatory GPD prawego ogona, liczone jako:

$$\hat{F}_z(z) = 1 - \frac{k}{n} \left(1 + \frac{\hat{\xi}}{\beta} (z - z_{(k+1)}) \right)^{-1/\hat{\xi}}, \quad (26)$$

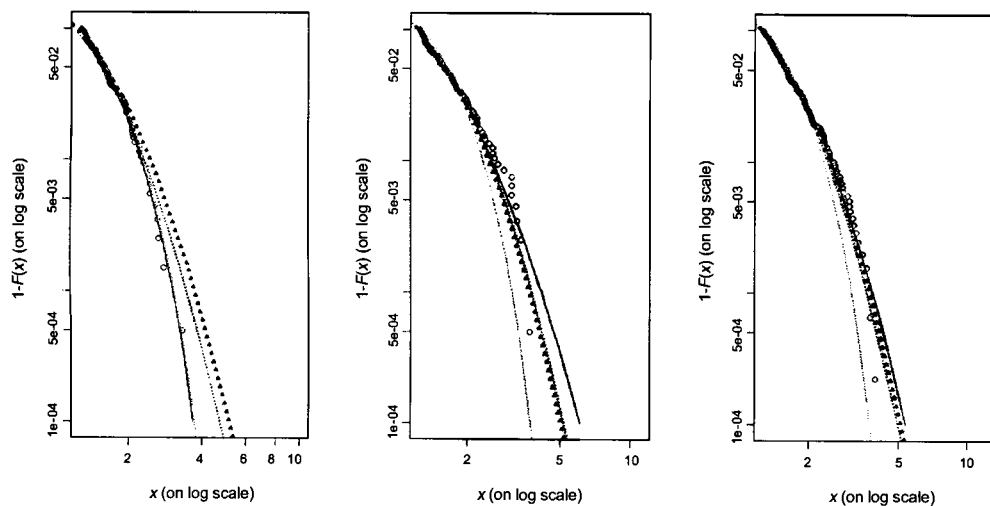
które zaznaczone są liniami czarnymi. Punkty pokazują rozkład empiryczny, natomiast szara linia oznacza ogon rozkładu normalnego, linia z trójkątami ogon rozkładu *t*-Studenta, a linia przerywana ogon skośnego rozkładu *t*-Studenta. Przy rozkładach *t*-Studenta przyjęto liczbę stopni swobody i wartość parametru skośności na tym samym poziomie co w odpowiednim rozkładzie oszacowanym w modelu AR(1)-GARCH(1,1).

Przy estymacji uogólnionego rozkładu Pareto dla podokresów zawierających po 1000 obserwacji ustalano próg jako 101. resztę, natomiast w przypadku całego badanego okresu próg ustalono jako 226. resztę. Pozwoliło to



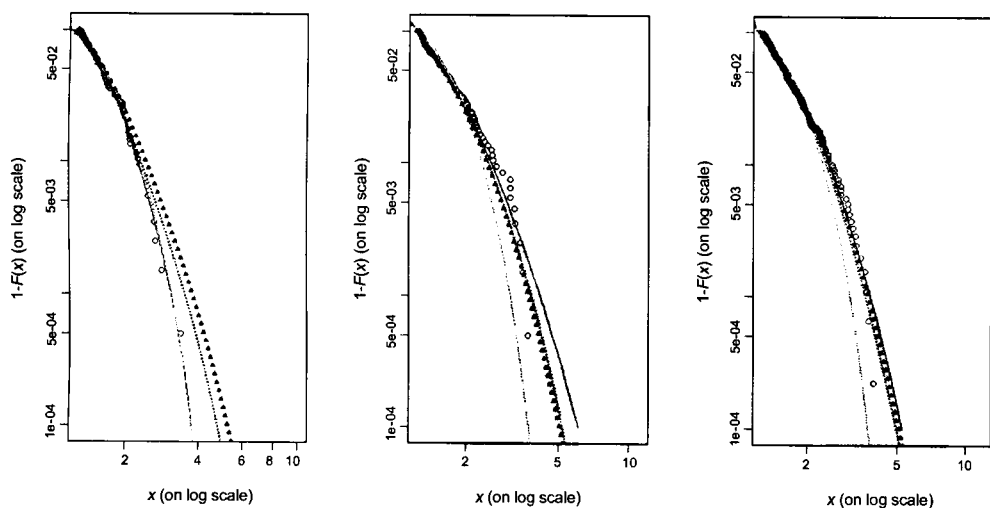
Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 12. Oszacowanie ogona dla reszt z modelu AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem normalnym kolejno dla pierwszego, drugiego i całego okresu



Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 13. Oszacowanie ogona dla reszt z modelu AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem t -Studenta kolejno dla pierwszego, drugiego i całego okresu



Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 14. Oszacowanie ogona dla reszt z modelu AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowym skośnym rozkładem t -Studenta kolejno dla pierwszego, drugiego i całego okresu

na oszacowanie kwantyli rzędu większego niż 0,9 z wykorzystaniem modelu GPD³.

Jak można zauważyć wykres ogona uogólnionego rozkładu Pareto pokrywa się z rozkładem empiryczny, co świadczy o tym, że rozkład ten sprawdza się dobrze w modelowaniu standaryzowanych reszt. Rozkład normalny w pierwszym okresie również dobrze opisuje analizowane reszty. Jednak, rozpatrując drugi lub cały badany okres, duże wartości reszt są niedoszacowane. Z kolei w przypadku obu rozkładów t -Studenta w pierwszym okresie reszty są przeszacowane, natomiast w dwóch pozostałych opisane są dość dobrze.

Kolejnym etapem badania empirycznego jest testowanie wsteczne, do którego użyto okna prognozy zawierającego 1000 obserwacji, czyli około 4 lat. Za każdym razem próg w metodzie POT ustalany był jako 101. reszta. W każdym kroku okno przesuwano o 1 dzień do przodu, a następnie ponownie estymowano model AR(1)-GARCH(1,1).

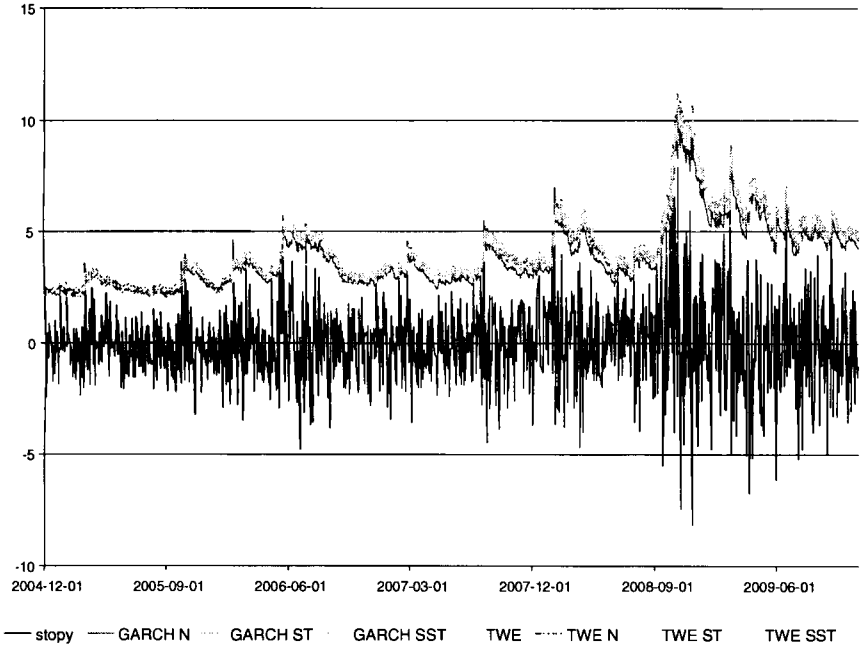
Porównanych ze sobą zostało siedem metod, które oznaczono następująco:

- GARCH N — miary ryzyka uzyskane w modelu AR(1)-GARCH(1,1) ze standardowym rozkładem normalnym;
- GARCH ST — miary ryzyka uzyskane w modelu AR(1)-GARCH(1,1) ze standaryzowanym rozkładem t -Studenta;
- GARCH SST — miary ryzyka uzyskane w modelu AR(1)-GARCH(1,1) ze standaryzowanym skośnym rozkładem t -Studenta;
- TWE — miary ryzyka uzyskane z wykorzystaniem uogólnionego rozkładu Pareto;
- TWE N — miary ryzyka uzyskane z wykorzystaniem uogólnionego rozkładu Pareto, do reszt z modelu AR(1)-GARCH(1,1) ze standardowym rozkładem normalnym;
- TWE ST — miary ryzyka uzyskane z wykorzystaniem uogólnionego rozkładu Pareto, do reszt z modelu AR(1)-GARCH(1,1) ze standaryzowanym rozkładem t -Studenta;
- TWE SST — miary ryzyka uzyskane z wykorzystaniem uogólnionego rozkładu Pareto, do reszt z modelu AR(1)-GARCH(1,1) ze standaryzowanym skośnym rozkładem t -Studenta.

Rycina 15 przedstawia prognozy wygasie dla kwantyla analizowanych stóp zwrotu rzędu 0,99. Na wykresie pokazano wszystkie badane metody dla całego rozpatrywanego okresu. Rycina 16 wykres jest fragmentem omawianego wykresu, na którym dokładniej widać zachowanie poszczególnych podejść.

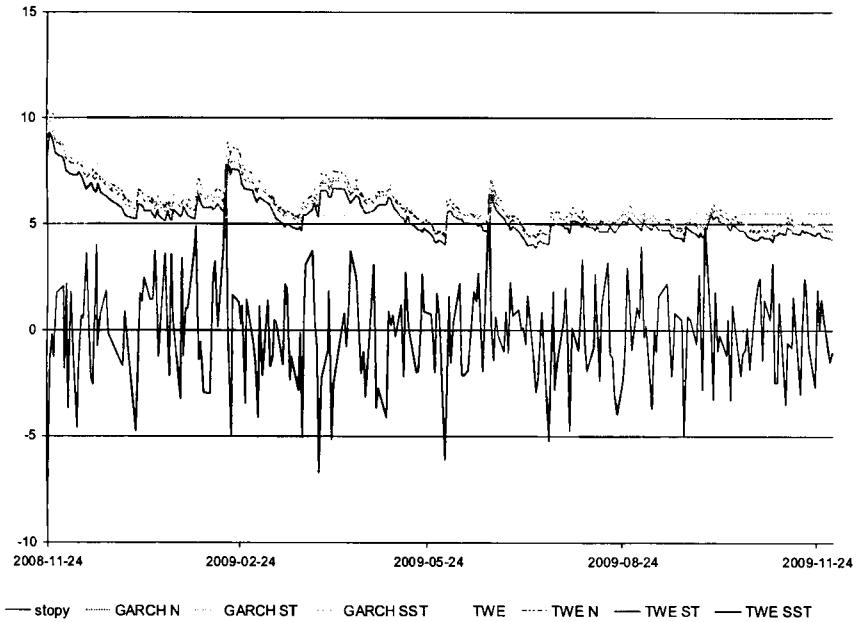
Podejściem szacującym \hat{x}_q , które najbardziej odróżnia się od pozostałych jest podejście oznaczone jako TWE, w którym to uogólniony rozkład Pareto jest dopasowywany bezpośrednio do stóp zwrotu. Jak widać w metodzie tej

³ Cały okres zawiera 2257 obserwacji, stąd w tym przypadku próg ustalono jako 226. resztę.



Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 15. Prognozy wygaśnię $\hat{x}_{0.99}^t$ dla całego badanego okresu



Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 16. Fragment wykresu prognoz wygaśnię $\hat{x}_{0.99}^t$

odpowieź na okresy o podwyższonej zmienności nie jest dostatecznie szybka, co skutkuje kilkoma przekroczeniami kwantyla jedno za drugim.

Drugim podejściem, które widocznie odznacza się od pozostałych jest podejście GARCH N, gdzie oszacowania kwantyla zostały uzyskane w modelu AR(1)-GARCH(1,1) ze standardowym rozkładem normalnym. W metodzie tej występuje odpowieź na grupowania się zmienności, jednak nie bierze się pod uwagę grubych ogonów reszt, a co za tym idzie, prowadzi to do większej liczby przekroczeń niż w pozostałych metodach.

Prognozy wygasłe dla metod poza wspomnianymi wcześniej TWE oraz GARCH N na wykresach wyglądają podobnie. W celu sprawdzenia jakości metod zastosowano test Kupca oraz funkcję straty Lopeza, których to wyniki znajdują się kolejno w tabelach 3 i 4.

Tabela 3

Wyniki testu Kupca

	Przekroczenia			Statystyka			<i>p-value</i>		
	0,95	0,99	0,995	0,95	0,99	0,995	0,95	0,99	0,995
GARCH N	68	27	18	0,4332	12,5923	14,5595	0,5104	0,0004	0,0001
GARCH ST	70	19	15	0,8271	2,8721	8,7274	0,3631	0,0901	0,0031
GARCH SST	70	21	16	0,8271	4,7520	10,5472	0,3631	0,0293	0,0012
TWE	95	28	19	15,0674	14,1820	16,7381	0,0001	0,0002	0,0000
TWE N	69	20	15	0,6148	3,7612	8,7274	0,4330	0,0525	0,0031
TWE ST	67	20	15	0,2826	3,7612	8,7274	0,5950	0,0525	0,0031
TWE SST	67	20	15	0,2826	3,7612	8,7274	0,5950	0,0525	0,0031
Wartość oczekiwana	63	13	6						

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 3 przedstawiona jest liczba przekroczeń kwantyla uzyskana w poszczególnych podejściach, jak i ich oczekiwana liczba. Ponadto, znajdują się w niej wartości statystyki testowej testu Kupca i *p-value* związane z tym testem. Analiza wyników potwierdza, że podejście TWE nie daje dobrych rezultatów w szacowaniu ryzyka, gdyż liczba przekroczeń jest znacznie większa niż założono. Podobna sytuacja odnosi się do podejścia GARCH N, gdy rozważany jest kwantyl rzędu większego niż 0,95. Najlepsze wyniki w przypadku kwantyla rzędu 0,95 uzyskano stosując podejście TWE ST i TWE SST, w przypadku kwantyla rzędu 0,99 GARCH ST, a w przypadku kwantyla rzędu 0,995 GARCH ST, TWE N, TWE ST i TWE SST.

Tabela 4

Wartości funkcji straty Lopeza

	Funkcja straty		
	0,95	0,99	0,995
GARCH N	0,099466928	0,032776728	0,020389575
GARCH ST	0,105084733	0,024017744	0,013233554
GARCH SST	0,104863223	0,024994623	0,013747649
TWE	0,186239099	0,048729235	0,025447276
TWE N	0,100128689	0,022135842	0,011700175
TWE ST	0,101327942	0,022465445	0,011848793
TWE SST	0,102113918	0,023137058	0,011924816

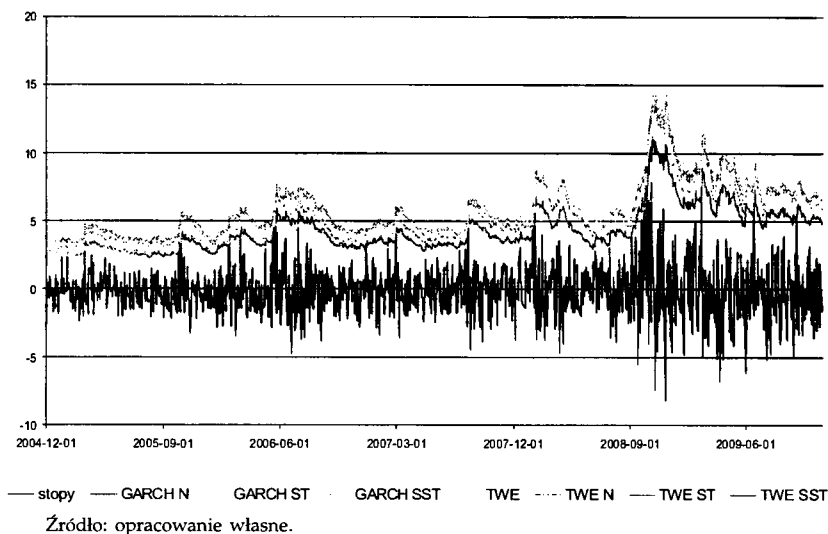
Źródło: opracowanie własne.

Dla kwantyla rzędu 0,995 niestety żadna z metod nie uzyskała satysfakcjonującego wyniku. Oczekiwana liczba przekroczeń wynosi 6, a jej najbliższym wynikiem jest 15. Kwantyl tak wysokiego rzędu jednak w praktyce jest używany bardzo rzadko.

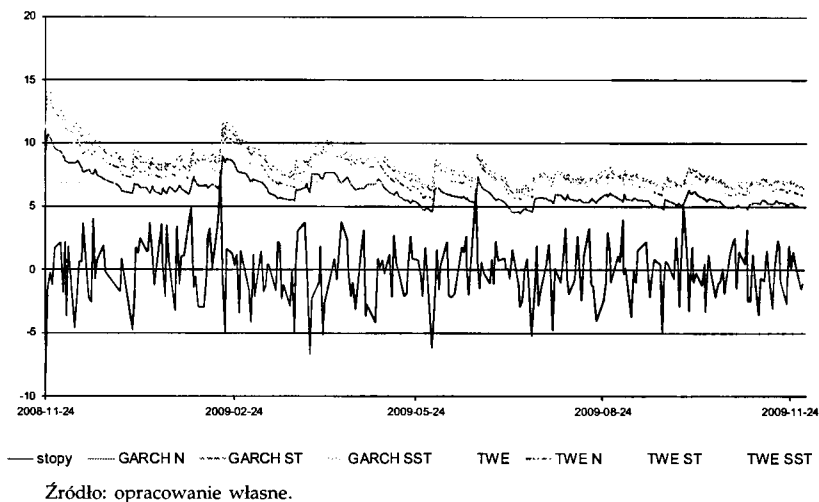
Najmniejsze wartości funkcja straty przyjmuje dla podejścia GARCH N w przypadku kwantyla 0,95 oraz dla podejścia TWE N w przypadku kwantyla rzędu 0,99 i 0,995.

Rezultaty niewiele gorsze od wspomnianych uzyskały metody TWE ST i TWE SST. Biorąc pod uwagę fakt, że wyniki testu Kupca dla tych metod są satysfakcjonujące, można uznać je za odpowiednie podejścia do modelowania wysokich kwantyli logarytmicznych stóp zwrotu.

Na rycinach 17 i 18 przedstawiono oszacowania oczekiwanego niedoboru, który może nieść dodatkową informację w stosunku do kwantyla rozkładu badanych stóp zwrotu. Przebieg podejścia GARCH N i TWE wygląda tak samo jak w przypadku analizowanego wcześniej kwantyla. Wartości w metodach TWE N, TWE ST i TWE SST są podobne i ich wykresy są zbliżone. W pierwszym okresie znacznie większe wartości przyjmują podejścia GARCH ST i GARCH SST. Jednak w okresie zwiększonej zmienności ich rezultaty są zbliżone do oszacowań uzyskanych pozostałymi metodami.



Ryc. 17. Prognozy wygaśnięcie oczekiwanego niedoboru rzędu 0,99



Ryc. 18. Fragment wykresu prognoz wygaśniętych oczekiwanego niedoboru rzędu 0,99

6. PODSUMOWANIE

Niniejsza praca dotyczyła szacowania ryzyka rynkowego. Pomiar ryzyka opierał się głównie na teorii wartości ekstremalnych, która to pozwalała na lepsze modelowanie zdarzeń rzadkich i niosących za sobą duże konsekwencje. Celem pracy było sprawdzenie czy podejście wykorzystujące teorię wartości ekstremalnych bezpośrednio do logarytmicznych stóp zwrotu, mimo niespełnienia założenia o niezależności obserwacji, będzie dawało satysfakcjonujące rezulta-

ty. Dodatkowo, podejścia wywodzące się z teorii wartości ekstremalnych (zarówno stosowane bezpośrednio do danych lub łącznie z ekonometrycznym modelem zmienności) miały być porównane ze standardowymi metodami stosowanymi przez praktyków (miary ryzyka uzyskiwane w modelu AR-GARCH ze standardowym rozkładem normalnym i standaryzowanym rozkładem t -Studenta).

Prognozy wygasłe dla kwantyla logarytmicznych stóp zwrotu świadczą o tym, że w podejściu wykorzystującym bezpośrednio uogólniony rozkład Pareto do stóp zwrotu nalicza się znacznie więcej przekroczeń niż jest to oczekiwane. W metodzie tej brak jest odpowiedzi na okresy o podwyższonej zmienności, a co za tym idzie następuje kilka przekroczeń kwantyla pod rząd. Z przeprowadzonego badania wynika, że podejście to nie daje satysfakcjonujących wyników w szacowaniu miar ryzyka, a w celu jego poprawy należało użyć dodatkowo ekonometrycznych modeli zmienności.

Jednym ze standardowych podejść, które były testowane równolegle z podejściami wykorzystującymi teorię wartości ekstremalnych, było podejście, w którym miary ryzyka były liczone z wykorzystaniem modelu AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem normalnym. Jak wynika z badań empirycznych, założenie normalności nie jest wystarczające do opisu własności grubych ogonów. W tym podejściu występuje odpowiednia reakcja na okresy różnej zmienności, jednak wartości kwantyli rzędu większego niż 0,95 są niedoszacowane.

Podejście łączące teorię wartości ekstremalnych i modelowanie zmienności za pomocą modelu AR(1)-GARCH(1,1) w szacowaniu ryzyka uzyskuje zadowalające rezultaty, o czym świadczą wyniki testu Kupca i wartości funkcji straty Lopeza. Tylko kwantyl rzędu 0,995 jest lekko niedoszacowany, jednak w praktyce kwantyl tak wysokiego rzędu jest wykorzystywany bardzo rzadko.

W dalszych badaniach można wprowadzić szereg modyfikacji zaprezentowanego podejścia w celu uzyskania bardziej satysfakcjonujących wyników. Użyty w pracy model AR-GARCH można zastąpić modelem ogólniejszym, np. ARMA-APARCH, który mógłby pozwolić na lepszy opis analizowanych danych. Ponadto, oprócz rozpatrywanych rozkładów warunkowych można zastosować inne — np. rozkład GED zaproponowany przez Nelsona w 1991 roku. Co do estymacji uogólnionego rozkładu Pareto można zmodyfikować sposób wyboru prognozy. Wprowadzenie takich zmian mogłoby zaowocować w przyszłych pracach badawczych, wykorzystujących teorię wartości ekstremalnych i ekonometryczne modele zmienności, bardziej dokładnym pomiarem ryzyka.

BIBLIOGRAFIA

- Balkema A., de Haan L. 1974. *Residual life time at great age*, Annals of Probability 2, nr 5, 792–804.
 Bystrom H.N.E. 2005. *Extreme value theory and extremely large electricity price change*, International Review of Economics and Finance 14, 41–55.

- Bollerslev T., Chou R., Kroner K. 1992. *ARCH modeling in finance*, Journal of Econometrics 52, 5–59.
- Doman M., Doman R. 2009. *Modelowanie zmienności i ryzyka*, Wolters Kluwer, Kraków.
- Finkenstädt B., Rootzén H. 2003. *Extreme Values in Finance, Telecommunications, and the Environment*, Champan & Hall/CRC, Boca Raton, Florida.
- Fiszeder P. 2009. *Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika.
- Gençay R., Selçuk F. 2004. *Extreme value theory and Value-at-Risk: Relative performance in emerging markets*, International Journal of Forecasting 20, 287–303.
- Gilli M., Kellezi E. 2006. *An Application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk*, Computational Economics 27, 1–23.
- Greene W.H. 2000. *Econometric Analysis*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
- Jajuga K. et al. 2007. *Zarządzanie ryzykiem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Kuester K., Mittnik S., Paolella M.S. 2006. *Value-at-Risk Prediction: A Comparison of Alternative Strategies*, Journal of Financial Econometrics 1, nr 1, 53–89.
- Lopez J. 1998. *Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates*, Federal Reserve Bank of New York. www.frbsf.org/econsrch/econrev/99-2/3-17.pdf
- Maghyreh A.I., Al-Zoubi H.A. 2008. *The tail behavior of extreme stock returns in the Gulf emerging markets: An implication for financial risk management*, Studies in Economics and Finance 25(1), 21–37.
- McNeil A., Frey R. 2000. *Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach*, Journal of Empirical Finance 7, 271–300.
- McNeil A., Frey R., Embrechts P. 2004. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*, Princeton Series in Finance, Princeton, New Jersey.
- Mikosch T., Resnick S., Robinson S. 2007. *Heavy-Tail Phenomena, Probabilistic and Statistical Modeling*, Springer, New York, New York.
- Osiewalski J., Pipień M. 1999. *Bayesian forecasting of exchange rates using GARCH models with skewed t conditional distributions*, MACROMODELS'98 — Conference Proceedings, Łódź, t. 2, 195–218.
- Osiewalski J., Pajor A. 2010. *Bayesian Value-at-Risk for a portfolio: multi- and univariate approaches using MSF-SBEKK models*, maszynopis, referat wygłoszony na międzynarodowej konferencji FindEcon, Łódź..
- Osińska M. 2006. *Ekonometria finansowa*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Pickands, J. 1975. *Statistical inference using extreme order statistics* The Annals of Statistics 3, nr 1, 119–131.
- Śmiech S. 2002. *Kilka uwag o metodach statystycznych wykorzystywanych w analizie wartości ekstremalnych*, [w:] *Przestrzenno-czasowe modelowanie i prognozowanie zjawisk gospodarczych*, red. A. Zeleń, materiały z XXIII Ogólnopolskiego Seminarium Naukowego zorganizowanego przez Zakład Teorii Prognoz Katedry Statystyki Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Zakopane, 2001, Wydawnictwo AE, Kraków.
- Śmiech S. 2005. *Metody analizy wartości ekstremalnych w zarządzaniu ryzykiem rynkowym*, praca doktorska, Akademia Ekonomiczna w Krakowie.
- Tarczyński W., Mojsiewicz M. 2001. *Zarządzanie ryzykiem: podstawowe zagadnienia*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.